

# Supraconductivité « conventionnelle »

Brigitte Leridon  
ILL, Grenoble mai 2014



# Plan du cours

## 1- Phénoménologie de la supraconductivité

Principales propriétés

Principaux supraconducteurs conventionnels

## 2- Théorie phénoménologique de Ginzburg et Landau

Equation de London

Energie libre GL

Supraconducteurs de type I ou II

## 3- Théorie microscopique BCS

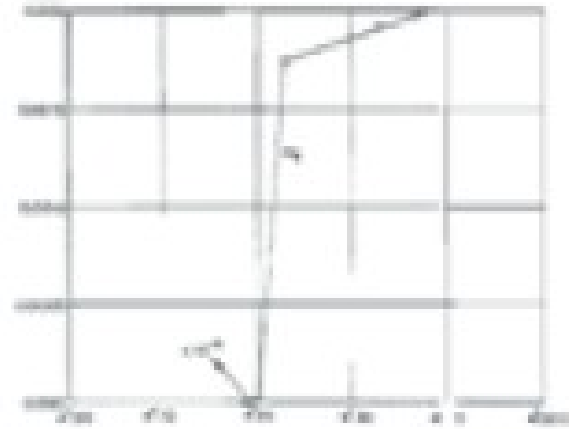
Mécanisme d'appariement-paires de Cooper

Etat fondamental, excitations, paramètre d'ordre, densité d'états...

# Qu'est-ce qu'un supraconducteur (qualitativement)?

- Découverte en 1911 par H. Kammerlingh Onnes dans Hg

$T_c = 4.2\text{K}$ ,  $R < 10^{-6}$  Ohms

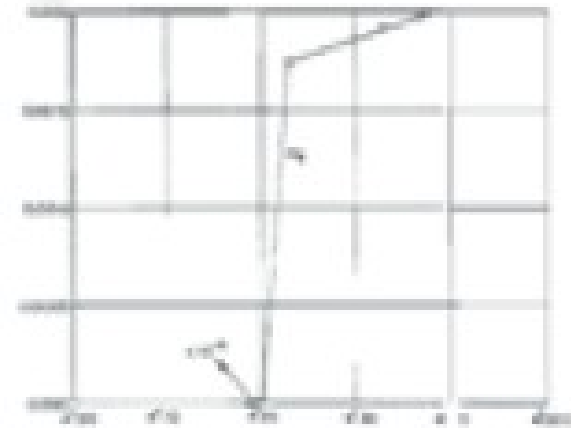
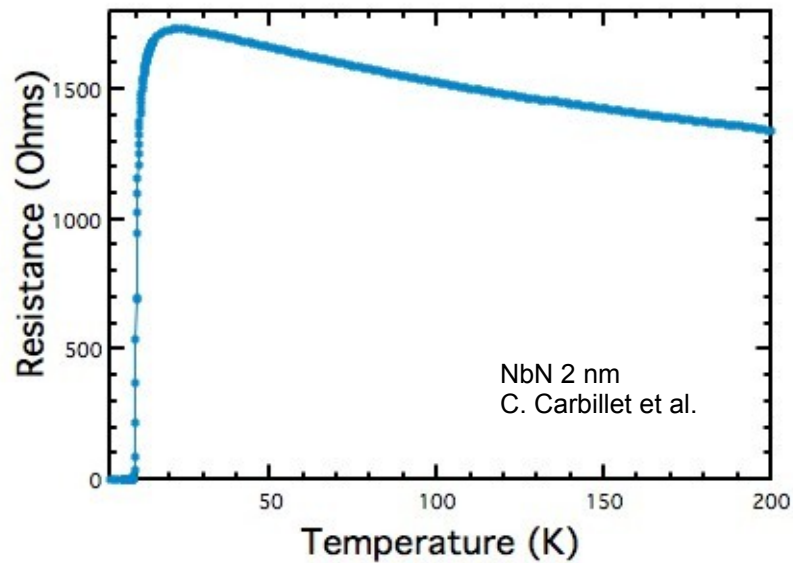


$R=0$

# Qu'est-ce qu'un supraconducteur (qualitativement)?

- Découverte en 1911 par H. Kammerlingh Onnes dans Hg

$T_c = 4.2\text{K}$ ,  $R < 10^{-6}\text{ Ohms}$



$R=0$

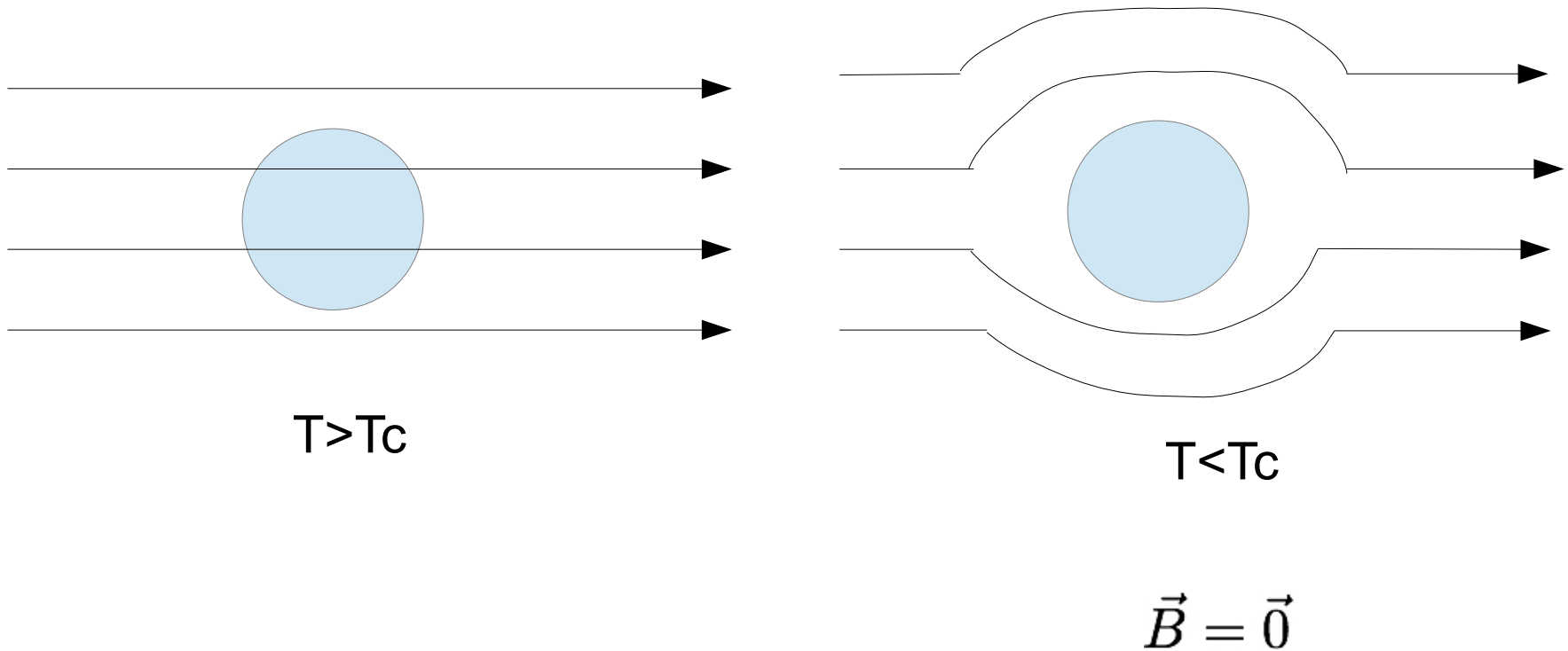
# Diamagnétisme parfait

- Dans un métal : 
$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = \vec{0}$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = \vec{0}$$

Ici il s'agit de tout autre chose...

# Qu'est-ce qu'un supraconducteur (qualitativement)?

- Effet Meissner découvert en 1933



# Diamagnétisme parfait



© CNRS Photothèque / J. Bobroff and J. Quillian

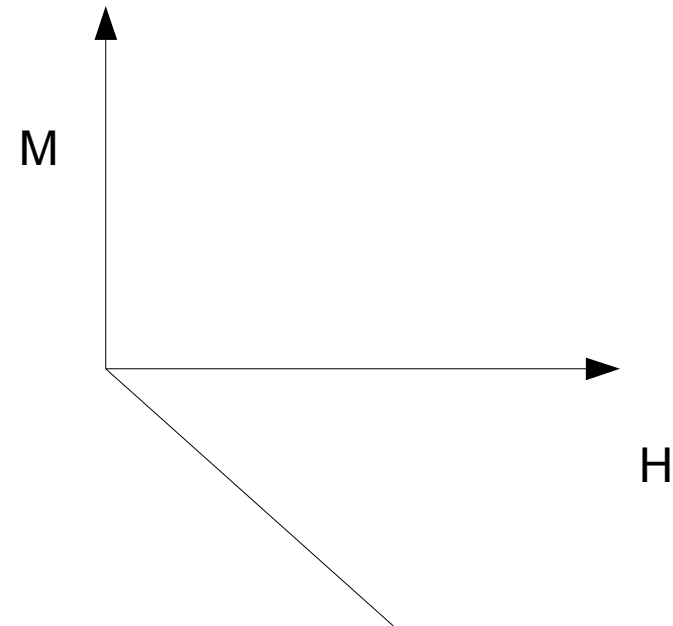
Brigitte Leridon - Ecole GDR MICo

# Expulsion du champ magnétique

- A bas champ

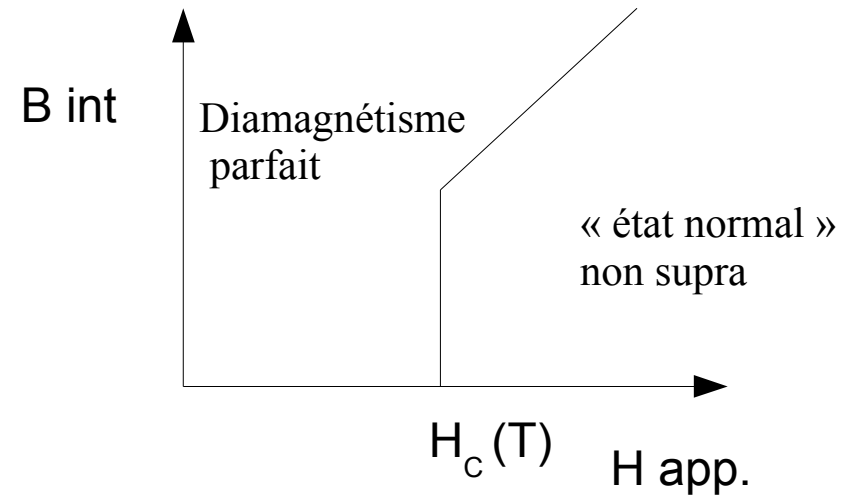
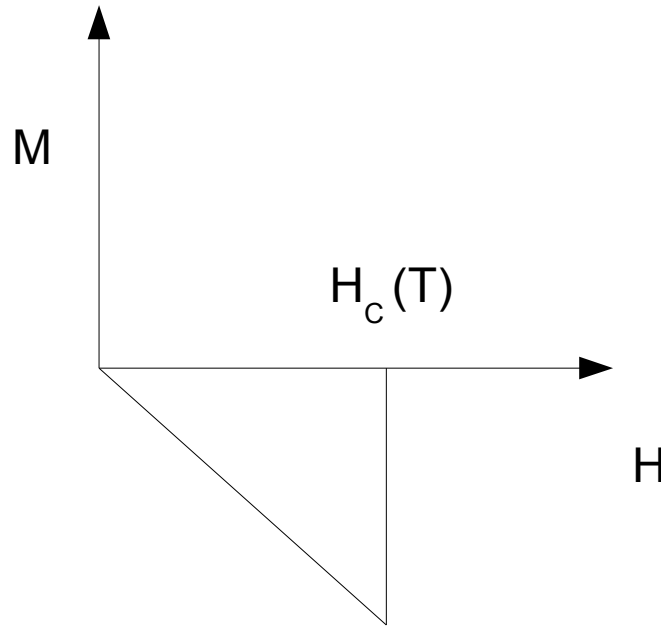
$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \vec{0}$$



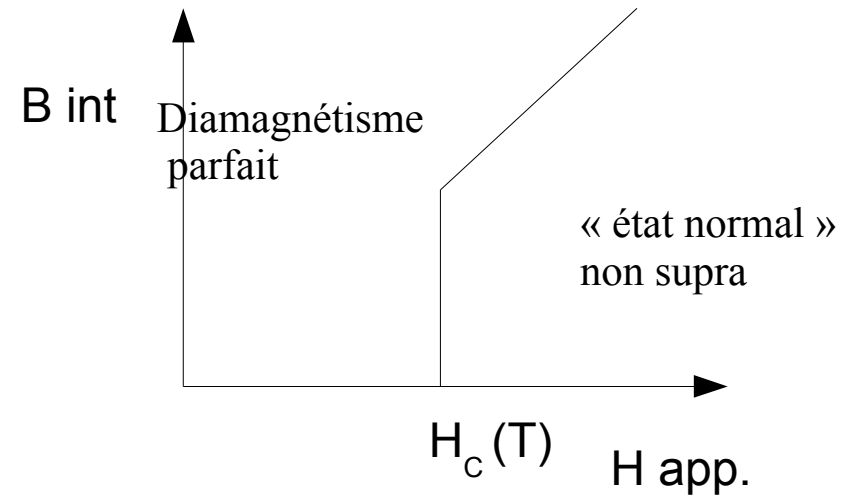
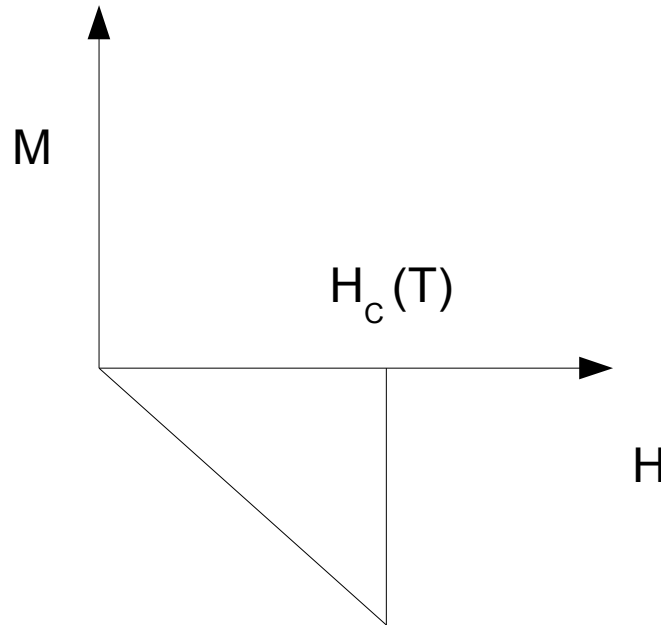
# Expulsion du champ magnétique

- Supraconducteur de type I

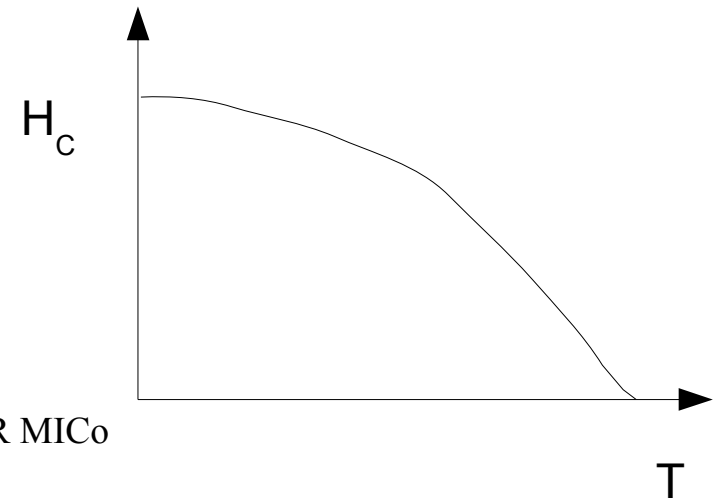


# Expulsion du champ magnétique

- Supraconducteur de type I

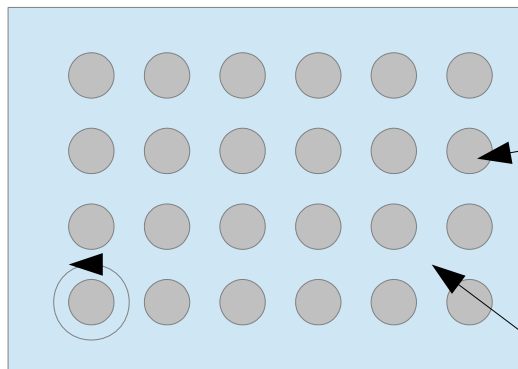
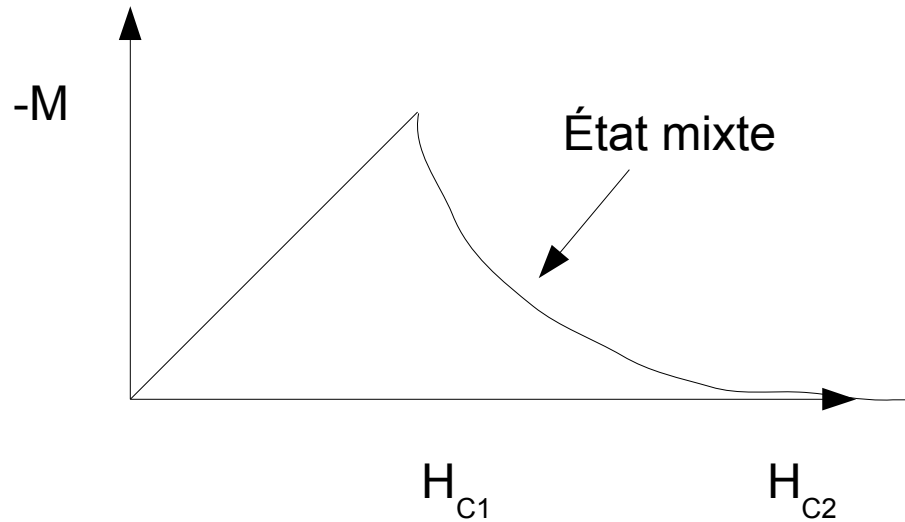


$$H_C(T) \sim H_C(0) \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)$$



# Expulsion du champ magnétique

- Supraconducteur de type II



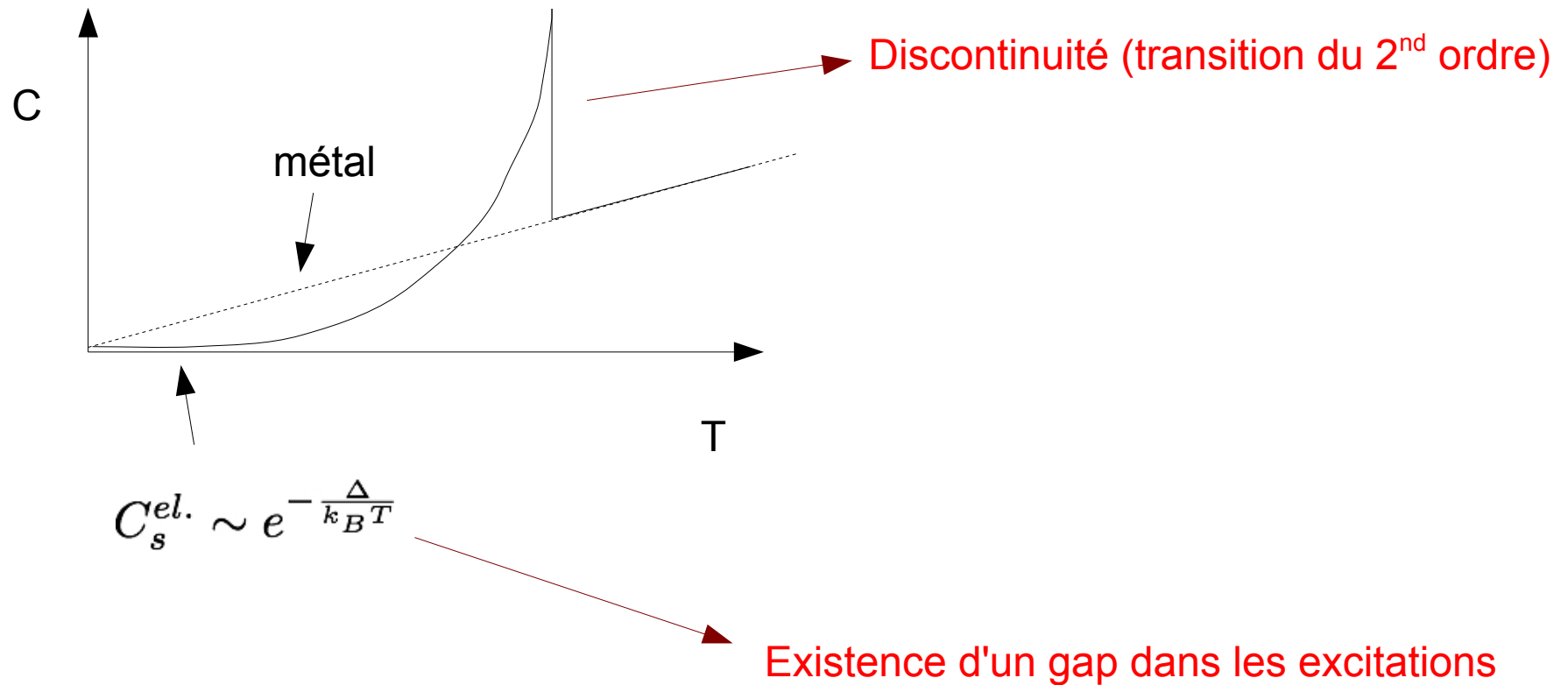
Fluxoïdes appelés vortex

Abrikosov, Zh Exp.i. Teor Fiz 32, 1442 (1957),  
Sov. Phys.-JET,5,1174

**Expulsion parfaite**  
Brigitte Leridon - Ecole GDR MICo

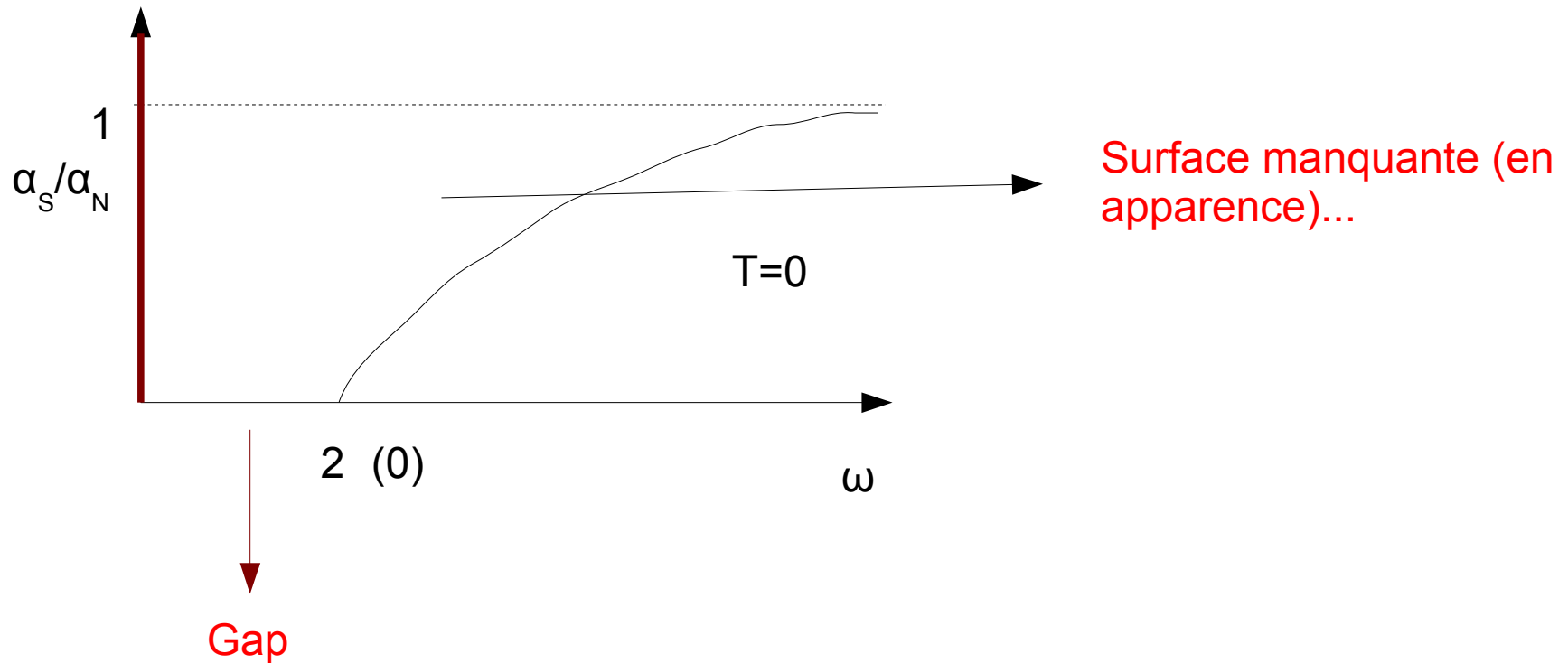
# Autres propriétés électroniques importantes

- Chaleur spécifique électronique



# Autres propriétés électroniques importantes

- Absorption électromagnétique

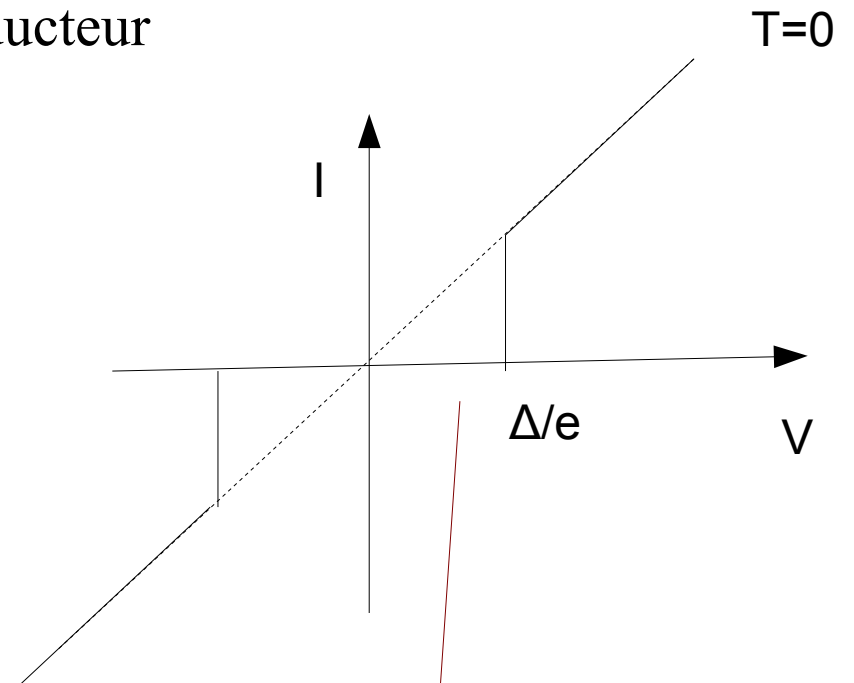
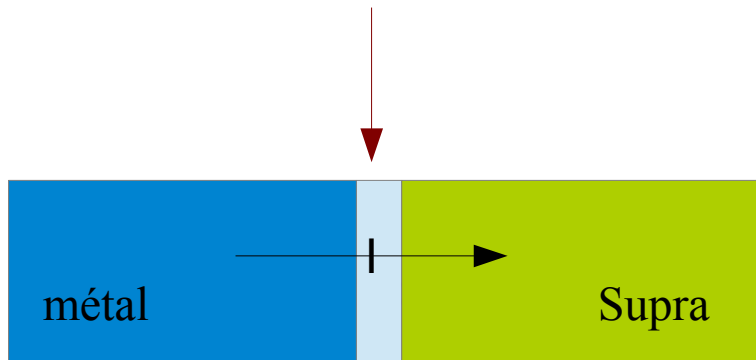


Le gap ne suffit pas pour faire un supraconducteur

# Effet tunnel métal/supraconducteur

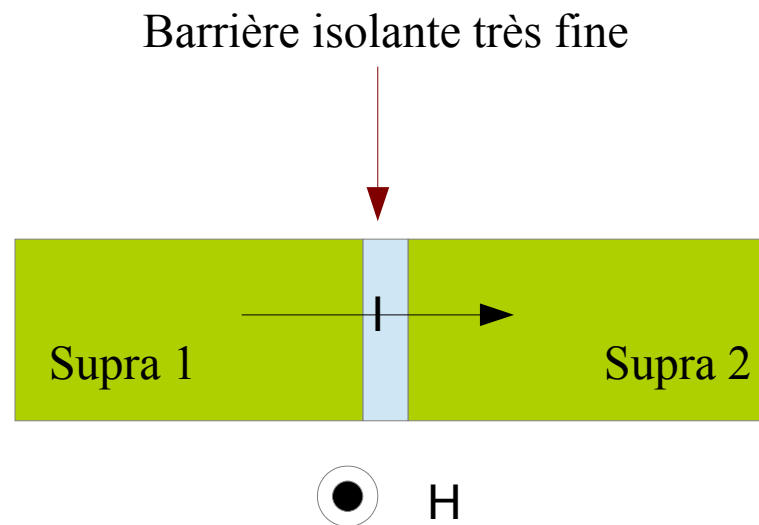
- Injecter des électrons dans un supraconducteur

Barrière isolante très fine

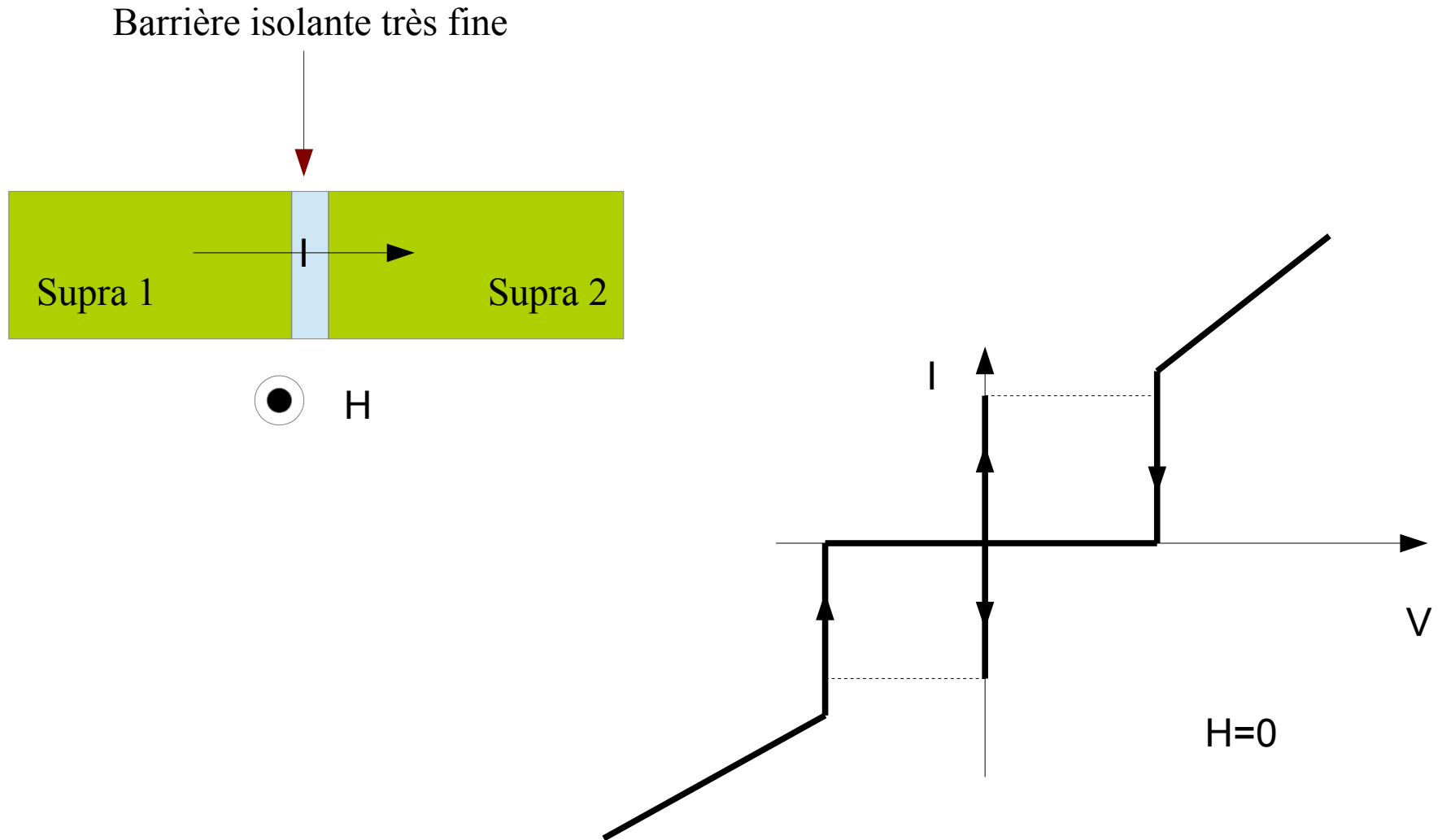


->Autre manifestation du gap

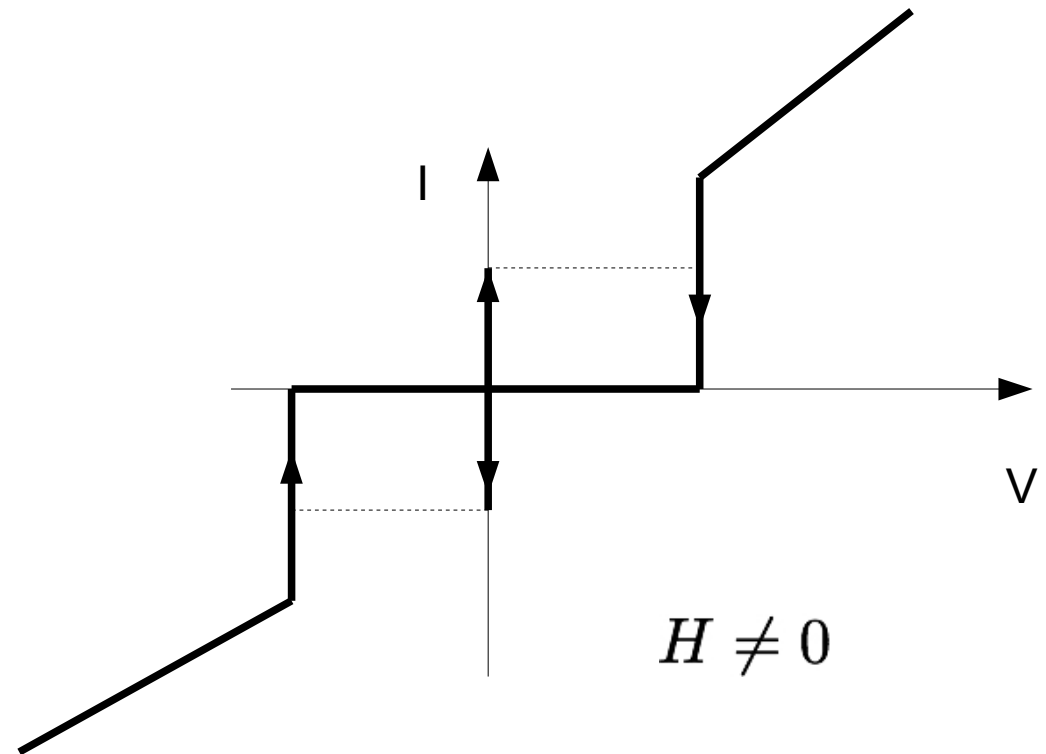
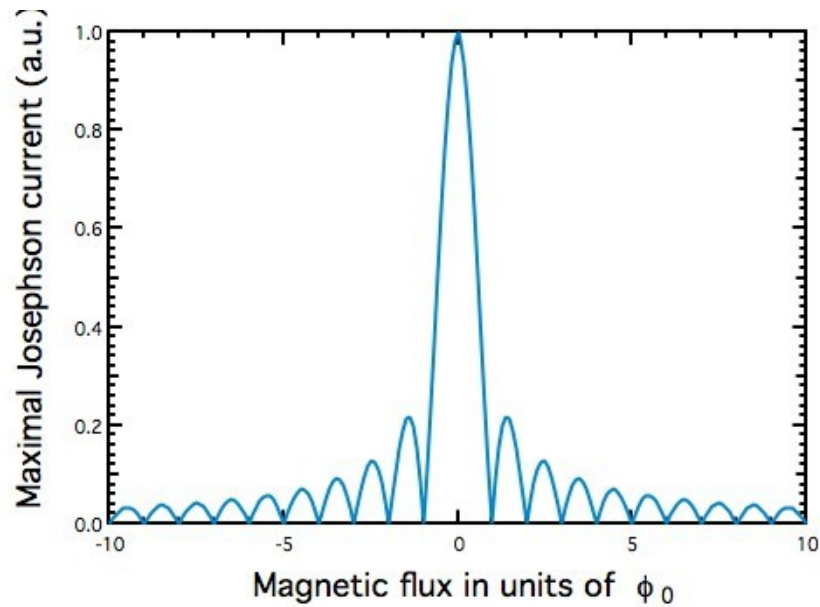
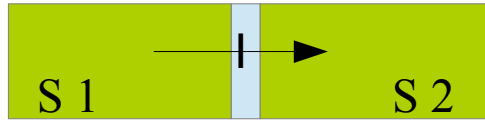
# Effet tunnel entre deux supraconducteurs



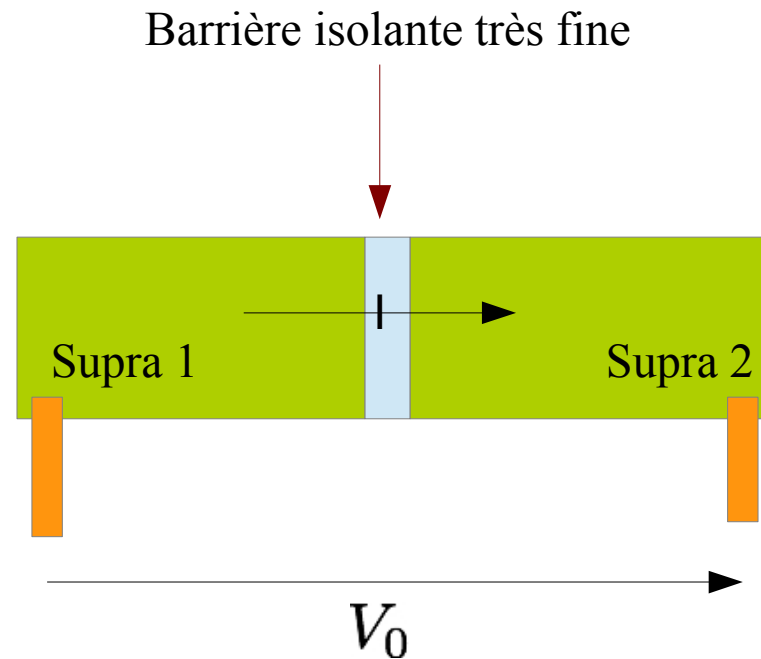
# Effet tunnel entre deux supraconducteurs



# Effet tunnel entre deux supraconducteurs



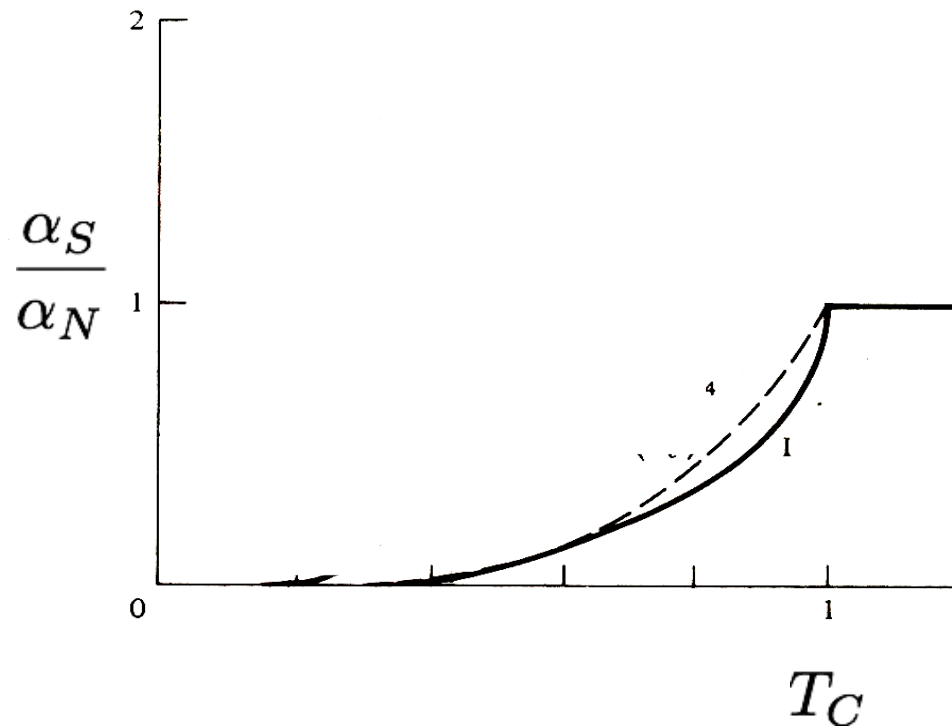
# Effet tunnel entre deux supraconducteurs



$$J = J_0 \sin(2eVt/\hbar)$$

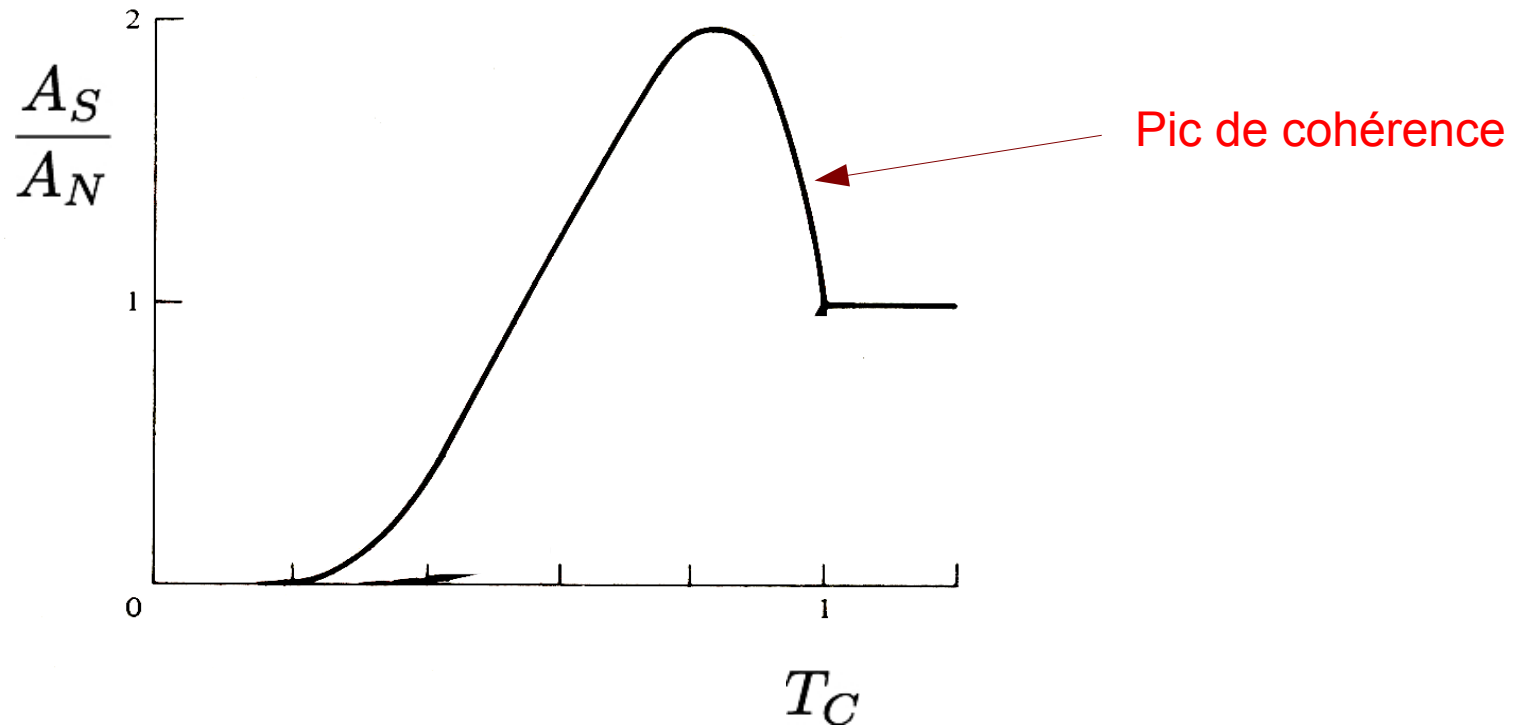
# Pic de cohérence

Atténuation ultrasonore en fonction de T



# Pic de cohérence

Absorption électromagnétique ou taux de relaxation nucléaire en fonction de T



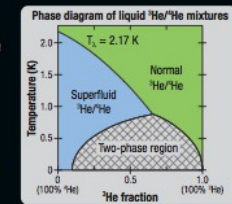
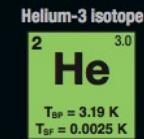
# Principaux supraconducteurs (éléments simples)

- Exclusion avec éléments magnétiques (sauf Fe sous pression)
- En général, les supraconducteurs ne sont pas de bons conducteurs
- Record de  $T_c$  pour Nb ( $T_c = 9.3\text{K}$ ,  $H_{c2} = 0.2\text{T}$ )
- Alliages du Nb très utilisés: NbN (16K), NbTi ( $T_c = 9.2\text{K}$ ,  $H_{c2} = 15\text{T}$ )

# Periodic Table of Elements

## Selected Phase Transition Temperatures

|                                                                                            |                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1<br>1.008<br><b>H</b><br>$T_{BP} = 20.3 \text{ K}$<br>$T_{MP} = 13.8 \text{ K}$           | 2<br>4.003<br><b>He</b><br>$T_{BP} = 4.21 \text{ K}$<br>$T_N = 2.17 \text{ K}$               |
| 3<br>6.941<br><b>Li</b><br>$T_S = 0.0004 \text{ K}$                                        | 4<br>9.012<br><b>Be</b><br>$T_S = 0.026 \text{ K}$                                           |
| 11<br>22.99<br><b>Na</b><br>Sodium                                                         | 12<br>24.31<br><b>Mg</b><br>Magnesium                                                        |
| 19<br>39.10<br><b>K</b><br>Potassium                                                       | 20<br>40.08<br><b>Ca</b><br>$216 \text{ GPa}$<br>$29 \text{ K}$                              |
| 21<br>44.96<br><b>Sc</b><br>$106 \text{ GPa}$<br>$19.6 \text{ K}$                          | 22<br>47.87<br><b>Ti</b><br>$56.0 \text{ GPa}$<br>$3.35 \text{ K}$<br>$T_S = 0.39 \text{ K}$ |
| 23<br>50.94<br><b>V</b><br>$120 \text{ GPa}$<br>$16.5 \text{ K}$<br>$T_S = 5.38 \text{ K}$ | 24<br>52.00<br><b>Cr</b><br>$T_N = 311 \text{ K}$                                            |
| 25<br>54.94<br><b>Mn</b><br>$(\alpha) T_N = 100 \text{ K}$                                 | 26<br>55.85<br><b>Fe</b><br>$21 \text{ GPa}$<br>$2.1 \text{ K}$<br>$T_C = 1043 \text{ K}$    |
| 27<br>58.93<br><b>Co</b><br>$T_C = 1388 \text{ K}$                                         | 28<br>58.69<br><b>Ni</b><br>$T_C = 627 \text{ K}$                                            |
| 29<br>63.55<br><b>Cu</b><br>Copper                                                         | 30<br>65.41<br><b>Zn</b><br>$T_S = 0.875 \text{ K}$                                          |
| 31<br>69.72<br><b>Ga</b><br>$1.4 \text{ GPa}$<br>$7 \text{ K}$<br>$T_S = 1.091 \text{ K}$  | 32<br>72.64<br><b>Ge</b><br>$11.5 \text{ GPa}$<br>$5.35 \text{ K}$                           |
| 33<br>74.92<br><b>As</b><br>$32 \text{ GPa}$<br>$2.4 \text{ K}$                            | 34<br>78.96<br><b>Se</b><br>$150 \text{ GPa}$<br>$8 \text{ K}$                               |
| 35<br>79.90<br><b>Br</b><br>$100 \text{ GPa}$<br>$1.4 \text{ K}$                           | 36<br>83.80<br><b>Kr</b><br>$T_{BP} = 119.9 \text{ K}$<br>$T_{MP} = 115.8 \text{ K}$         |
| 37<br>85.47<br><b>Rb</b><br>Rubidium                                                       | 38<br>87.62<br><b>Sr</b><br>$50 \text{ GPa}$<br>$7 \text{ K}$                                |
| 39<br>88.91<br><b>Y</b><br>$115 \text{ GPa}$<br>$19.5 \text{ K}$                           | 40<br>91.22<br><b>Zr</b><br>$30 \text{ GPa}$<br>$11 \text{ K}$<br>$T_S = 0.546 \text{ K}$    |
| 41<br>92.91<br><b>Nb</b><br>$10 \text{ GPa}$<br>$9.9 \text{ K}$<br>$T_S = 9.20 \text{ K}$  | 42<br>95.94<br><b>Mo</b><br>$T_S = 0.92 \text{ K}$                                           |
| 43<br>98.91<br><b>Tc</b><br>$T_S = 7.77 \text{ K}$                                         | 44<br>101.1<br><b>Ru</b><br>$T_S = 0.51 \text{ K}$                                           |
| 45<br>102.9<br><b>Rh</b><br>$T_S = 0.00033 \text{ K}$                                      | 46<br>106.4<br><b>Pd</b><br>Palladium                                                        |
| 47<br>107.9<br><b>Ag</b><br>Silver                                                         | 48<br>112.4<br><b>Cd</b><br>$T_S = 0.52 \text{ K}$                                           |
| 49<br>114.8<br><b>In</b><br>$T_S = 3.404 \text{ K}$                                        | 50<br>118.7<br><b>Sn</b><br>$11.3 \text{ GPa}$<br>$5.3 \text{ K}$<br>$T_S = 3.722 \text{ K}$ |
| 51<br>121.8<br><b>Sb</b><br>$25 \text{ GPa}$<br>$3.9 \text{ K}$                            | 52<br>127.6<br><b>Te</b><br>$35 \text{ GPa}$<br>$7.5 \text{ K}$                              |
| 53<br>126.9<br><b>I</b><br>$25 \text{ GPa}$<br>$1.2 \text{ K}$                             | 54<br>131.3<br><b>Xe</b><br>$T_{BP} = 165.0 \text{ K}$<br>$T_{MP} = 161.3 \text{ K}$         |
| 55<br>132.9<br><b>Cs</b><br>$12 \text{ GPa}$<br>$1.3 \text{ K}$                            | 56<br>137.3<br><b>Ba</b><br>$18 \text{ GPa}$<br>$5 \text{ K}$                                |
| 57<br>(223)<br><b>Fr</b><br>Francium                                                       | 58<br>(226)<br><b>Ra</b><br>Radium                                                           |
| 72<br>178.5<br><b>Hf</b><br>$62 \text{ GPa}$<br>$8.6 \text{ K}$<br>$T_S = 0.12 \text{ K}$  | 73<br>180.9<br><b>Ta</b><br>$43 \text{ GPa}$<br>$4.5 \text{ K}$<br>$T_S = 4.483 \text{ K}$   |
| 74<br>183.8<br><b>W</b><br>$T_S = 0.012 \text{ K}$                                         | 75<br>186.2<br><b>Re</b><br>$T_S = 1.4 \text{ K}$                                            |
| 76<br>190.2<br><b>Os</b><br>$T_S = 0.655 \text{ K}$                                        | 77<br>192.2<br><b>Ir</b><br>$T_S = 0.14 \text{ K}$                                           |
| 78<br>195.1<br><b>Pt</b><br>Platinum                                                       | 79<br>197.0<br><b>Au</b><br>Gold                                                             |
| 80<br>200.6<br><b>Hg</b><br>$(\alpha) T_S = 4.153 \text{ K}$                               | 81<br>204.4<br><b>Tl</b><br>$T_S = 2.39 \text{ K}$                                           |
| 82<br>207.2<br><b>Pb</b><br>$T_S = 7.193 \text{ K}$                                        | 83<br>209.0<br><b>Bi</b><br>$9.1 \text{ GPa}$<br>$8.5 \text{ K}$                             |
| 84<br>(209)<br><b>Po</b><br>Polonium                                                       | 85<br>(210)<br><b>At</b><br>Astatine                                                         |
| 86<br>(222)<br><b>Rn</b><br>$T_{BP} = 211.5 \text{ K}$<br>$T_{MP} = 202.2 \text{ K}$       |                                                                                              |
| 104<br>(261)<br><b>Rf</b><br>Rutherfordium                                                 | 105<br>(262)<br><b>Db</b><br>Dubnium                                                         |
| 106<br>(266)<br><b>Sg</b><br>Seaborgium                                                    | 107<br>(264)<br><b>Bh</b><br>Bohrium                                                         |
| 108<br>(269)<br><b>Hs</b><br>Hassium                                                       |                                                                                              |



Atomic number → 26 ← Atomic weight 55.85

Element symbol **Fe** ← Color code

Transition temperature  $T_C = 1043 \text{ K}$

Superconductivity under pressure

pressure to achieve max.  $T_S$  → 21 gigapascal

max.  $T_S$  → 2.1 kelvin

273.15 K = 0 °C    1 GPa = 10 kbar

Superconductivity  $T_S$  = Critical temperature

Ferromagnetism  $T_C$  = Curie temperature

Antiferromagnetism  $T_N$  = Néel temperature

No known ordering

Gaseous elements phase change at 1 bar pressure

$T_S$  = Helium-4 superfluidity  
 $T_{SF}$  = Helium-3 superfluidity  
 $T_{BP}$  = Boiling point  
 $T_{MP}$  = Melting point

### Magnetic standard reference materials

Platinum  $\chi_{00}(297 \text{ K}) = 1.01 \times 10^{-6} \text{ emu/g-Oe}$  (NIST SRM #764a)  
Palladium  $\chi_{00}(298 \text{ K}) = 5.25 \times 10^{-6} \text{ emu/g-Oe}$  (Quantum Design part #C210A)  
Nickel  $M_{sat}(298 \text{ K}, 5000 \text{ Oe}) = 54.9 \text{ emu/g}$  (NIST SRM #772a)

Acknowledgements:  
M. Brian Maple, University of California, San Diego  
J. S. Schilling, Washington University, St. Louis  
Compilation date: October 2012 (rev. 3)  
© 2012 Quantum Design, Inc.  
Dedicated to the memory of Bernd Matthias

### References:

CRC Handbook of Chemistry and Physics, 84<sup>th</sup> Edition, David R. Lide (Ed.) (2002)

Metals and Metallurgy at Low Temperatures, 2<sup>nd</sup> Edition, F. Pabell (1996)

Introduction to Magnetic Materials, 2<sup>nd</sup> Edition, B. D. Culity and C. D. Graham (2008)

M. Ohashi, T. Matsuda, J. J. Hamlin, W. B. Y. Meng, K. Shimizu and J. S. Schilling, Journal of Physics: Conference Series 216, 012034 (2010)

S. T. Matthias, T. H. Geballe and V. B. Corson, Review of Modern Physics 35, 1 (1963)

Condensed Encyclopedia of Magnetic and Superconducting Materials, 2<sup>nd</sup> Edition, K. H. J. Buschow (Ed.) (2006)

Calcium: M. Sakata, Y. Nakano, K. Shimizu, T. Matsuda, and Y. Ohno, Physical Review B 83, 220517 (2011)

Oxygen Magnetism: S. Gregory, Physical Review Letters 40, 723 (1978)

www.nist.gov/srm/

|                                                                                                |                                                                                                |                                                          |                                                                                                           |                                        |                                                                                         |                                                                                                   |                                                   |                                                                                  |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                  |                                                                                |                                       |                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 57<br>138.9<br><b>La</b><br>$15 \text{ GPa}$<br>$13 \text{ K}$<br>$(fcc) T_S = 6.00 \text{ K}$ | 58<br>140.1<br><b>Ce</b><br>$5 \text{ GPa}$<br>$1.7 \text{ K}$<br>$T_{N-max} = 13.7 \text{ K}$ | 59<br>140.9<br><b>Pr</b><br>$T_{N-max} = 0.03 \text{ K}$ | 60<br>144.2<br><b>Nd</b><br>$T_{N-max} = 19.9 \text{ K}$<br>$T_{N-cub} = 7.5 \text{ K}$                   | 61<br>(145)<br><b>Pm</b><br>Promethium | 62<br>150.4<br><b>Sm</b><br>$T_{N-max} = 109 \text{ K}$<br>$T_{N-cub} = 14.0 \text{ K}$ | 63<br>152.0<br><b>Eu</b><br>$142 \text{ GPa}$<br>$2.75 \text{ K}$<br>$T_{N-cub} = 90.4 \text{ K}$ | 64<br>157.3<br><b>Gd</b><br>$T_C = 293 \text{ K}$ | 65<br>158.9<br><b>Tb</b><br>$T_{N-max} = 230 \text{ K}$<br>$T_C = 220 \text{ K}$ | 66<br>162.5<br><b>Dy</b><br>$T_{N-max} = 180 \text{ K}$<br>$T_C = 90.5 \text{ K}$ | 67<br>164.9<br><b>Ho</b><br>$T_{N-max} = 132 \text{ K}$<br>$T_C = 19.5 \text{ K}$ | 68<br>167.3<br><b>Er</b><br>$T_{N-max} = 85 \text{ K}$<br>$T_C = 18.7 \text{ K}$ | 69<br>168.9<br><b>Tm</b><br>$T_{N-max} = 58 \text{ K}$<br>$T_C = 32 \text{ K}$ | 70<br>173.0<br><b>Yb</b><br>Ytterbium | 71<br>175.0<br><b>Lu</b><br>$174 \text{ GPa}$<br>$12.4 \text{ K}$ |
| 89<br>(227)<br><b>Ac</b><br>Actinium                                                           | 90<br>232.0<br><b>Th</b><br>$T_S = 1.368 \text{ K}$                                            | 91<br>231.0<br><b>Pa</b><br>$T_S = 1.4 \text{ K}$        | 92<br>238.0<br><b>U</b><br>$1.2 \text{ GPa}$<br>$(\alpha) 2.4 \text{ K}$<br>$(\beta) T_S = 0.8 \text{ K}$ | 93<br>(237)<br><b>Np</b><br>Neptunium  | 94<br>(244)<br><b>Pu</b><br>Plutonium                                                   | 95<br>(243)<br><b>Am</b><br>$6 \text{ GPa}$<br>$2.2 \text{ K}$<br>$T_S = 0.79 \text{ K}$          | 96<br>(247)<br><b>Cm</b><br>$T_N = 64 \text{ K}$  | 97<br>(247)<br><b>Bk</b><br>$T_N = 34 \text{ K}$                                 | 98<br>(251)<br><b>Cf</b><br>$T_C = 51 \text{ K}$                                  | 99<br>(252)<br><b>Es</b><br>Einsteinium                                           | 100<br>(257)<br><b>Fm</b><br>Fermium                                             | 101<br>(258)<br><b>Md</b><br>Mendelevium                                       | 102<br>(259)<br><b>No</b><br>Nobelium | 103<br>(262)<br><b>Lr</b><br>Lawrencium                           |



MPMS<sup>®</sup>-XL EverCool<sup>®</sup>  
Base: 1.9 K - 400 K  
Oven: 300 K - 800 K  
Helium-3: 0.48 K - 1.8 K



PPMS<sup>®</sup> EverCool<sup>®</sup> II  
Base: 1.9 K - 400 K  
Oven: 300 K - 1000 K  
Helium-3: 0.350 K - 350 K



VersaLab<sup>™</sup>  
Base: 50 K - 400 K  
Oven: 300 K - 1000 K



PPMS<sup>®</sup> DynaCool<sup>™</sup>  
Base: 1.8 K - 400 K  
Oven: 300 K - 1000 K  
Dilution Refrigerator: 0.050 K - 4.0 K



MPMS<sup>®</sup> SQUID VSM EverCool<sup>®</sup>  
Base: 1.8 K - 400 K  
Oven: 300 K - 1000 K



Quantum Design  
www.qdusa.com info@qdusa.com

A complete line of  
cryogen-free products

# Autres familles de supraconducteurs

- Alliages A-15 ( $A_3B$  ; A métal de transition)

ex :  $V_3Si$  (17K, 25T) Hardy et al Physical Review 89 (4): 884 (1953)

$Nb_3Sn$  (18K, 24T),  $Nb_3Ge$  (23K, 37T) record de  $T_c$  de 1973 à 1987 !

- Phases de Chevrel ( $PbMo_6S_8$ ,  $SuMo_6S_8$ ,  $HoMo_6Se_8$ )  $T_C \sim 13 - 15K$
- $MgB_2$  (39 K!!!) découvert en 2000...

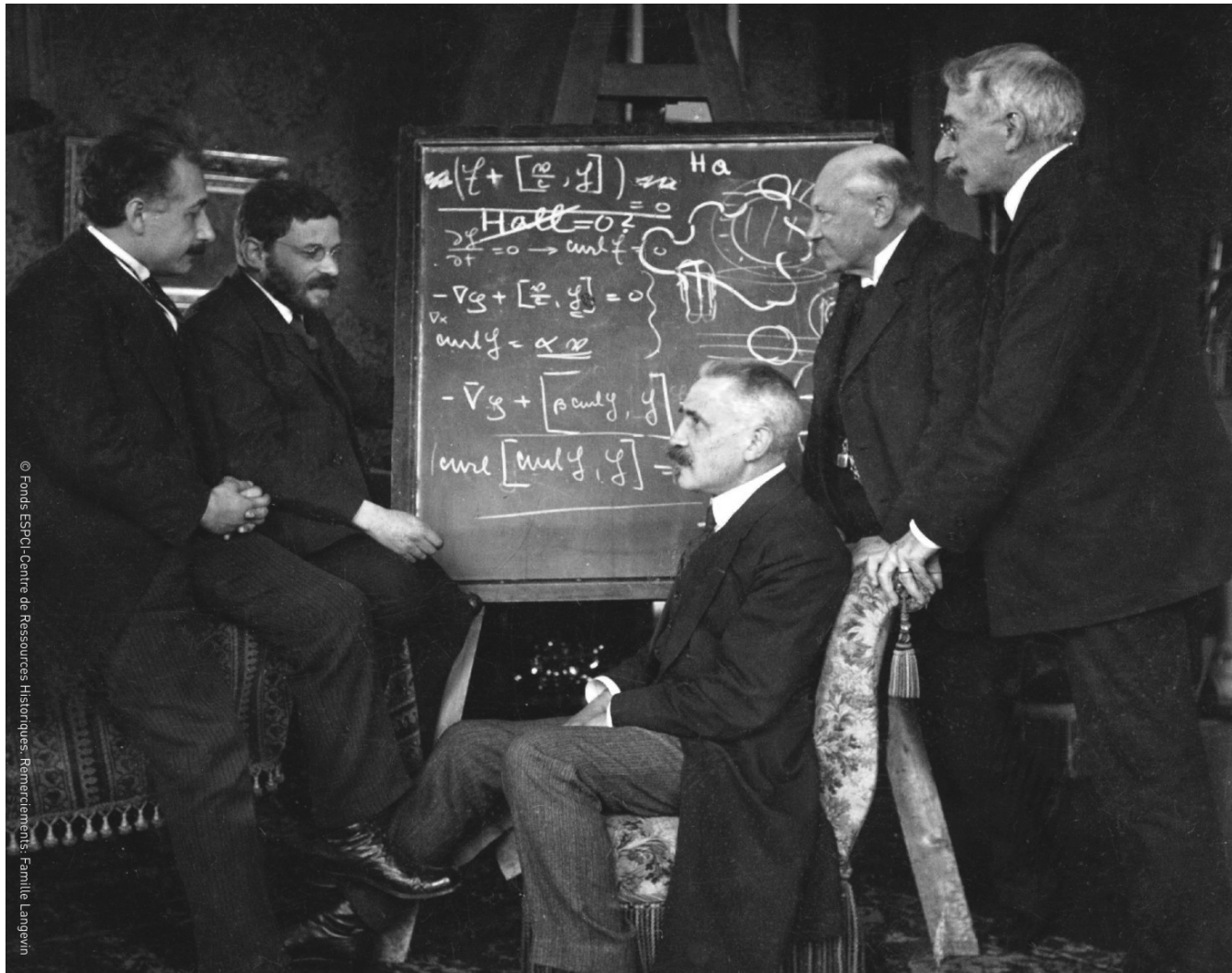
# Supraconducteurs « exotiques »

- Fermions lourds
  - $\text{CeCu}_2\text{Si}$  Steglich, Physical Review Letters 43, 1892 (1978)
  - $\text{CeCoIn}_5$  ( $T_c=2.3\text{K}$ )
- Supraconducteurs organiques :
  - Sels de Bechgaard  $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$  ( $T_c \sim 1\text{K}$ )
  - $(\text{BEDT-TTF})_2\text{X}$  ( $T_c \sim 1\text{K}$ )
  - Record pour le fullerène  $\text{RbCs}_2\text{C}_{60}$   $T_c=33\text{ K}$
  - Composés d'intercalation du graphite...
- Cuprates supraconducteurs :

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-d}$  ( $T_{c_{\max}}=93\text{ K}$ ),  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$  ( $2223\text{ Tc}_{\max}=110\text{ K}$ ),  $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$  (45K), Tl-Ba-Ca-Cu-O ( $T_{c_{\max}}=125\text{ K}$ ),  $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_8$  ( $T_{c_{\max}}=135\text{ K}$ )
- Pnictures de fer ( $T_{c_{\max}}=56\text{K}$ )

→ voir cours avancé de Yann Gallais demain

## Leyde 1920



© ESPCI ParisTech - Centre de ressources historiques

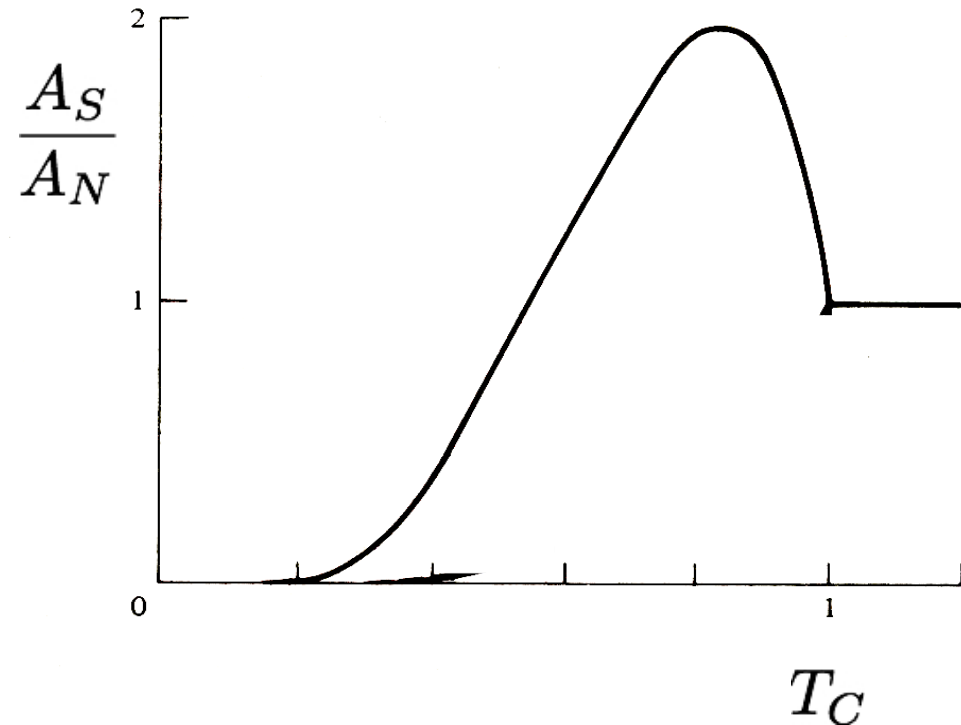
Brigitte Leridon - Ecole GDR MICo

# Premiers essais de théories supras...

- 1934 Gorter et Casimir : deux fluides (n et s)

$$n_n(T) = \left(\frac{T}{T_C}\right)^4 n$$

$$n_s(T) = \left(1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4\right) n$$



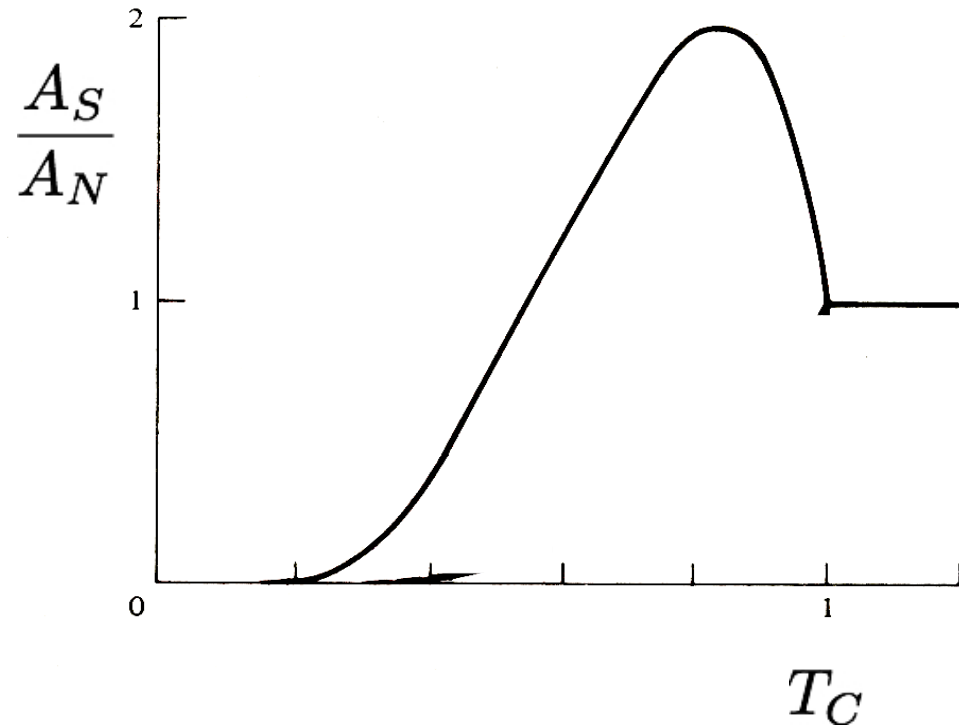
→ Pb avec l'absorption e.m. en T : pic de cohérence

# Premiers essais de théories supras...

- 1934 Gorter et Casimir : deux fluides (n et s)

$$n_n(T) = \left(\frac{T}{T_C}\right)^4 n$$

$$n_s(T) = \left(1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^4\right) n$$



→ Pb avec l'absorption e.m. en T : pic de cohérence

F. et H. London...

1935 : Equations de F. et H. London

$$\vec{\text{rot}}(\vec{J}_S) = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{B} \quad \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$$

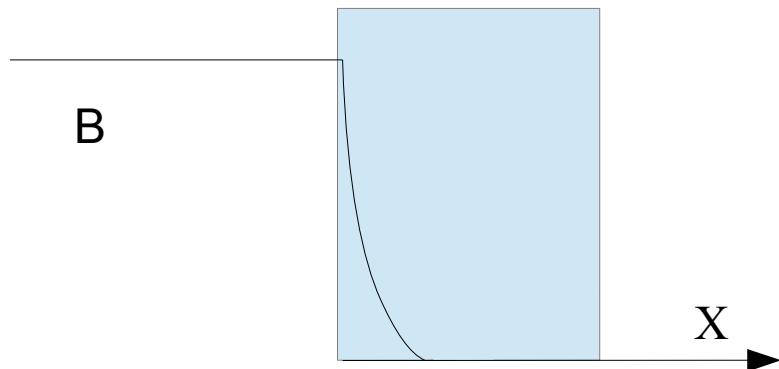
Combiné à l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$B(x) = B(0) \exp(-x/\lambda_L)$$

$$\Delta \vec{B} = -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}$$

$$\lambda_L(T) = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s(T) e^2}}$$



F. et H. London...

Se condensent en une seule équation :

$$\vec{J}_S = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{A} \quad \begin{array}{l} \nearrow \vec{rot}(\vec{J}_S) = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{B} \\ \searrow \frac{\partial \vec{J}_S}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E} \end{array}$$

Avec la jauge de Coulomb

$$div(\vec{A}) = 0$$

$$\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}$$

# Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (1950)



# Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau

- Intuition de base : paramètre d'ordre  $|\psi\rangle$
- Densité locale d'électrons supraconducteurs  $|\psi(r)|^2 = n_s(r)$
- Energie libre GL (postulée):

$$F = F_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*A)\psi|^2 + \frac{B^2}{8\pi}$$

$$\beta > 0$$

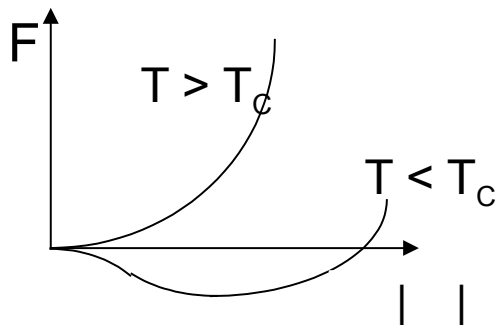
Méthode variationnelle

# Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (1950)

$$F = F_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - e^*A)\psi|^2 + \frac{B^2}{8\pi}$$

- en l'absence de champs et de gradients...

$$\alpha > 0 \Rightarrow |\psi_{min}|^2 = 0 \quad \alpha < 0 \Rightarrow |\psi_{min}|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$$



$$F_s - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{H_C^2}{8\pi}$$

# Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (1950)

$\alpha$  change de signe à  $T_c$        $\alpha(T) = -\alpha'(1 - T/T_c)$

près de  $T_c$  :       $|\psi|^2 = n_s \propto (1 - T/T_c)$

Si on réécrit maintenant  $F$  avec       $\psi = |\psi| e^{i\varphi}$

$$F = F_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} (\hbar^2 (\nabla |\psi|)^2 + (\hbar \nabla \varphi - e^* A)^2 |\psi|^2) + \frac{B^2}{8\pi}$$

$e^* = 2e?$

# Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (1950)

minimisation de F en présence de gradients et de courants

$$\alpha\psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\psi = 0 \quad (1)$$

$$J = -i\frac{e\hbar}{m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4e^2}{m}\psi^*\psi A \quad (2)$$

ou encore  $J = \frac{2e}{m} |\psi|^2 (\hbar\nabla\varphi - 2eA)$

# Deux conséquences immédiates

(1) peut se réécrire en l'absence de champs

$$f = \psi / \psi_{min} \quad f - f^3 + \frac{\hbar^2}{2m |\alpha|} \frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

$$A = 0$$

$$\xi_{GL}^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m |\alpha(T)|}$$

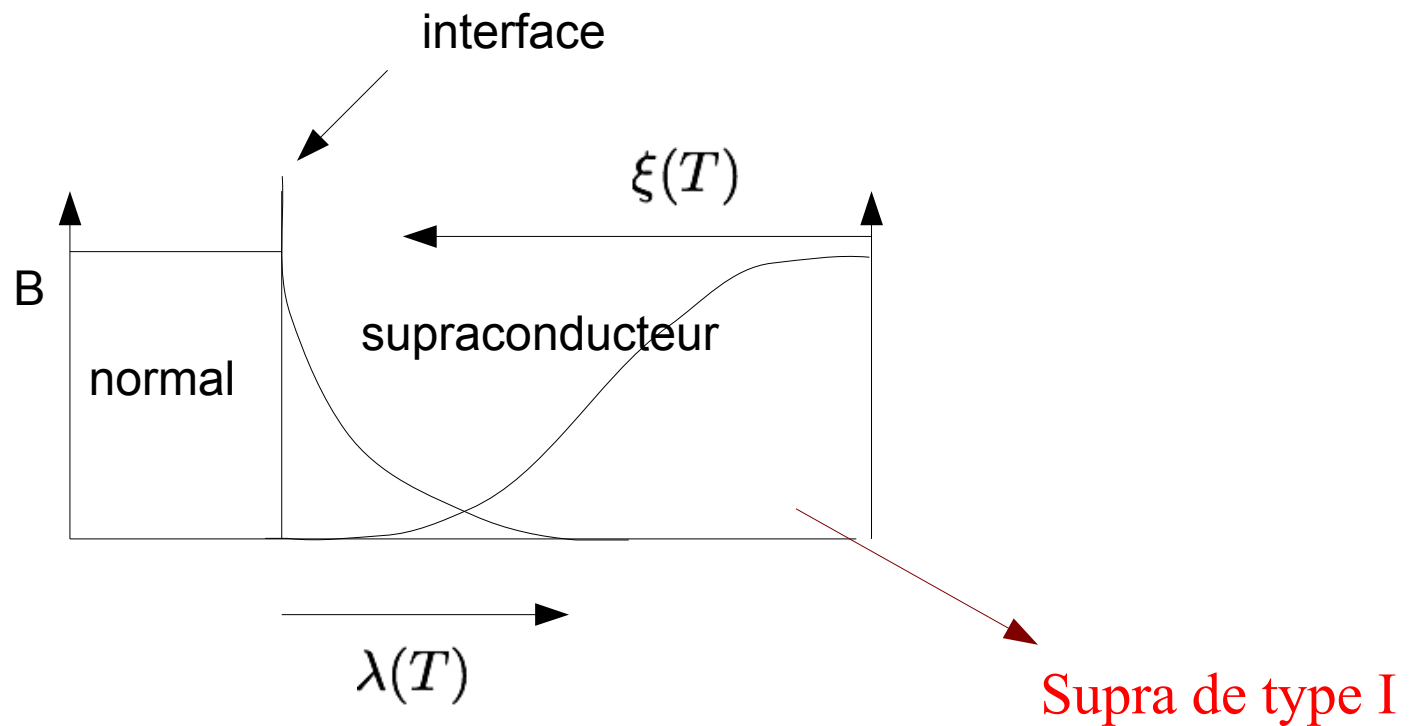
(2) va redonner l'équation de London générale

$$J = \frac{2e}{m} |\psi|^2 (\hbar \nabla \varphi - 2eA) \quad \vec{J}_S = -\frac{n_s e^2}{m} \vec{A}$$

# Supras de type I ou II

- Deux longueurs caractéristiques :

$$\kappa = \lambda/\xi \quad \kappa < 1$$



# Supras de type I ou II

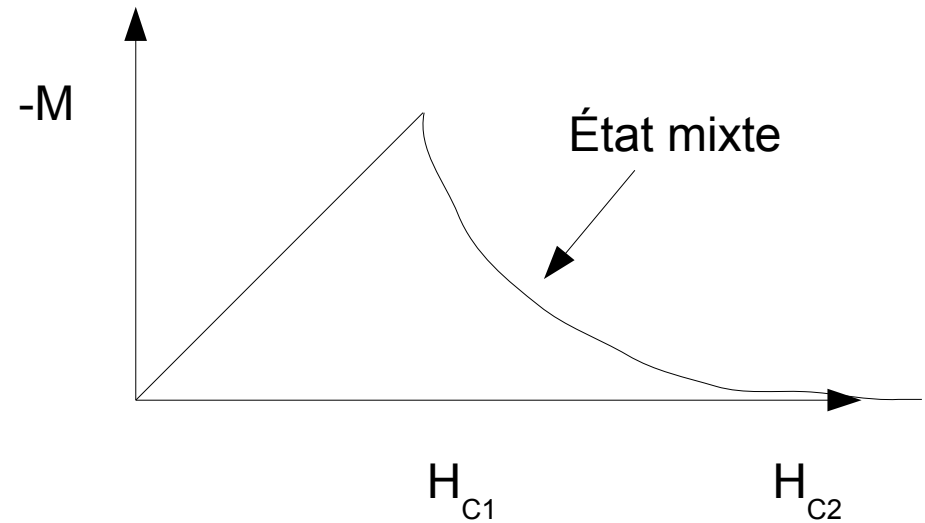
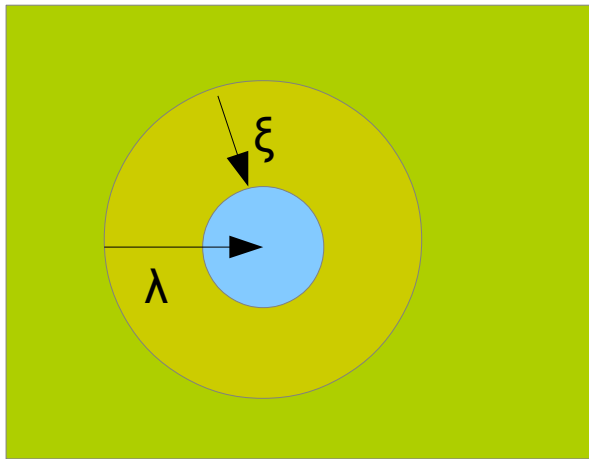
- Deux longueurs caractéristiques :

$$\kappa = \lambda / \xi$$

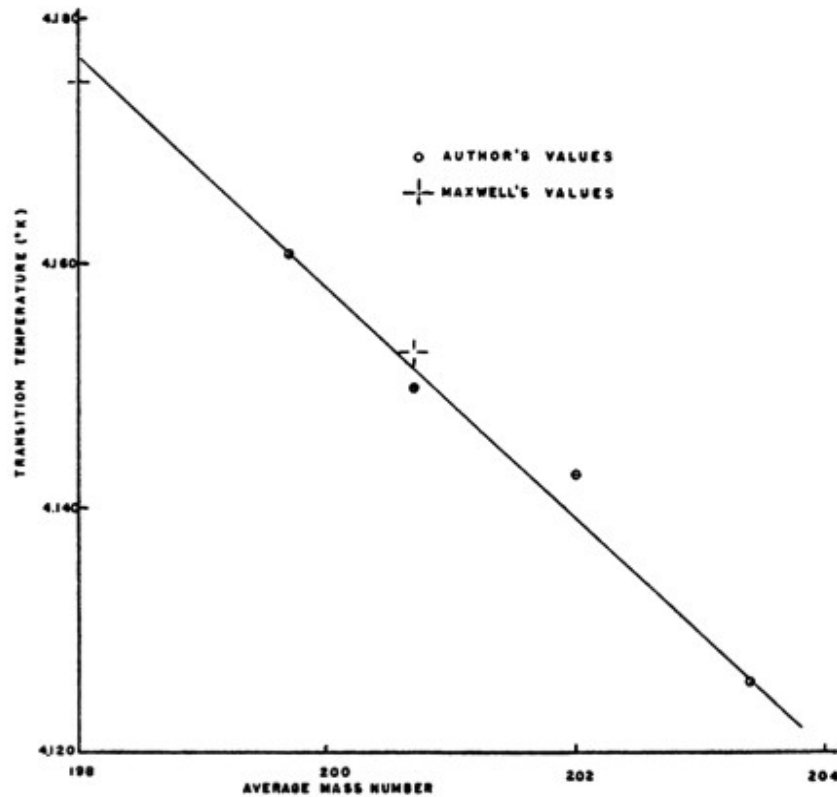
$$\kappa > 1$$

Le champ pénètre sans détruire la supra : vortex d'Abrikosov

Supra de type II



# Effet isotopique (1950)

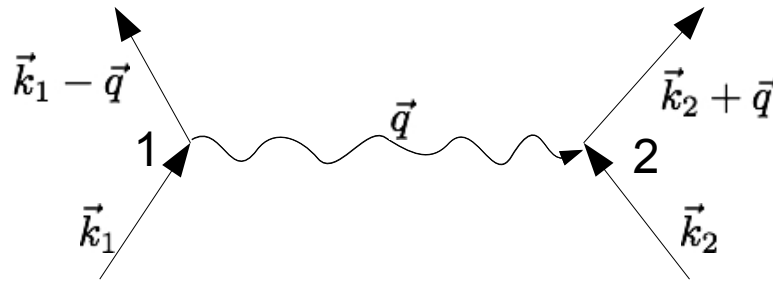


Maxwell PRB 78,477 (1950) ; Reynolds PRB 78, 487 (1950)

FIG. 2. The transition temperature *vs.* the average mass numbers of the isotopic mixtures.

# Couplage électron-(phonon)-électron

- Possibilité d'une interaction attractive entre les e-



$$|i\rangle = |\vec{k}_1, \vec{k}_2, 0_{\vec{q}}\rangle$$

$$|f\rangle = |\vec{k}_1 - \vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{q}, 0_{\vec{q}}\rangle$$

$$1 \quad g_{\vec{q}} C_{\vec{k}_1 - \vec{q}}^+ C_{\vec{k}_1} a_{\vec{q}}^+$$

$$2 \quad g_{\vec{q}} C_{\vec{k}_2 + \vec{q}}^+ C_{\vec{k}_2} a_{\vec{q}}$$

$$H_{e-ph} = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} g_{\vec{q}} C_{\vec{k} - \vec{q}}^+ C_{\vec{k}} (a_{\vec{q}}^+ + a_{-\vec{q}})$$

Fröhlich, Proc. Roy. Soc.(London) A215, 291 (1952)

# Couplage électron-(phonon)-électron

Au premier ordre en perturbation :  $\langle f | H_{e-ph} | i \rangle = 0$

$$| i' \rangle = | i \rangle + \sum_I | I \rangle \frac{\langle I | H_{e-ph} | i \rangle}{E_i - E_I}$$

$$| f' \rangle = | f \rangle + \sum_I | I \rangle \frac{\langle I | H_{e-ph} | f \rangle}{E_f - E_I}$$

On peut montrer que, au second ordre en perturbation:

$$\langle f' | H_{e-ph} | i' \rangle = \langle f | H_{eff} | i \rangle = 2 | g_{\vec{q}} |^2 \frac{2\hbar\omega_{\vec{q}}}{(\hbar\omega)^2 - (\hbar\omega_{\vec{q}})^2}$$

$$H_{eff} = 2 \sum_I \frac{H_{e-ph} | I \rangle \langle I | H_{e-ph}}{E_i - E_I}$$

$$\hbar\omega = \epsilon_{\vec{k}_1} - \epsilon_{\vec{k}_1 - \vec{q}} = \epsilon_{\vec{k}_2 + \vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}_2}$$

# Couplage électron-(phonon)-électron

$$H_{eff} = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{q}} \frac{4 |g_{\vec{q}}|^2 \hbar \omega_{\vec{q}}}{(\hbar \omega)^2 - (\hbar \omega_{\vec{q}})^2} C_{\vec{k}_1 - \vec{q}}^+ C_{\vec{k}_2 + \vec{q}}^+ C_{\vec{k}_1} C_{\vec{k}_2}$$

$$g_{\vec{q}} = i \frac{e^2}{\epsilon_0 \Omega_0 q} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{\vec{q}}}}$$

$$V(\vec{q}, \omega) = \left(\frac{e^2}{\epsilon_0 \Omega_0}\right)^2 \frac{1}{q^2 MN} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\vec{q}}^2}$$

On voit que le couplage sera attractif dès que :  $\hbar \omega < \hbar \omega_D$

En tenant compte de l'interaction coulombienne :

$$V_{tot}(\vec{q}, \omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 \Omega q^2} \left\{ 1 + \frac{2e^2/\epsilon_0 \Omega_0 M}{\omega^2 - \omega_{\vec{q}}^2} \right\}$$

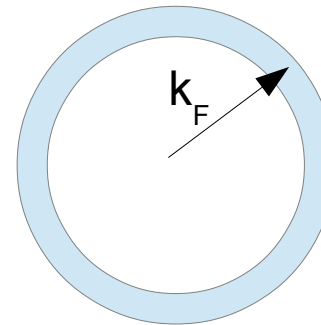
# Le modèle de Cooper

- Peut-on avoir un état lié entre deux e- à la sfce de Fermi ?
- Cooper a cherché un état propre de H en développant la solution cherchée sur les états inoccupés.

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}(k > k_F)} \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

- On prend  $V_l(k, k') = V_l$  pour  $k_F - \Delta k < k$  et  $k' < k_F + \Delta k$   
 $\delta\epsilon = \hbar v_F \Delta k$

$$E = \frac{2\Delta\epsilon}{e^{\frac{2}{|V_l|n(0)}} - 1}$$



Dès que l'interaction attractive existe alors l'état lié est possible (uniquement en présence de la mer de Fermi).

# La théorie BCS (1957)

- Méthode variationnelle

$$\Phi = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) |0\rangle$$

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad b_{\vec{k}}^+ = c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+$$

Bosons ou fermions ?

# La théorie BCS (1957)

- Méthode variationnelle

$$\Phi = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) |0\rangle$$

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad b_{\vec{k}}^+ = c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+$$

$$[b_{\vec{k}}^+, b_{\vec{k}'}^+] = 0 \quad \text{mais} \quad (b_{\vec{k}}^+)^2 = (b_{\vec{k}}^-)^2 = 0$$

$$[b_{\vec{k}}^-, b_{\vec{k}'}^+] = (1 - (n_{\vec{k}} + n_{\vec{k}'})) \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad \rightarrow \text{Statistique non triviale}$$

# La théorie BCS (1957)

$$\Phi = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) |0\rangle$$

Rmq :  $\Phi$  n'est pas une fonction propre de  $N$

$$\langle N \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2$$

$$(\Delta N)^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$$

$$(\Delta N)^2 = 4 \sum_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^2 v_{\vec{k}}^2 < 4 v_{\vec{k}}^2 = 2N \quad \frac{(\Delta N)}{\langle N \rangle} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\langle N \rangle}}$$

→ Si la phase est parfaitement fixée alors  $N$  fluctue.

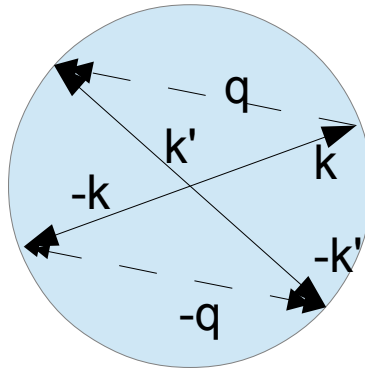
# Hamiltonien du système

$$H = H_0 + H_{int} = \sum_{k,\sigma} E_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + H_{int} \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Modèle de Cooper

$$\tilde{v}(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{\Omega} \int v(\vec{r}) e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} d^3r$$

$$H_{int} = \sum_{kk'} V_{kk'} b_k^+ b_{k'} \quad V_{kk'} = \langle k', -k' | V | k, -k \rangle$$



$$\langle \Phi | H_0 + H_{int} | \Phi \rangle$$

$$\langle \Phi | H_0 + H_{int} - \mu N | \Phi \rangle = \langle \Phi | H_0 - \mu N | \Phi \rangle + \langle \Phi | H_{int} | \Phi \rangle$$

Ecrire  $\langle N \rangle = N_0$  permet de fixer la valeur de

$$H_0 - \mu N = \sum_{k\sigma} (E_{\vec{k}} - \mu) C_{k,\sigma}^+ C_{k,\sigma} \quad \epsilon_{\vec{k}} = E_{\vec{k}} - \mu$$

$$\Phi = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) | 0 \rangle = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+) | 0 \rangle$$

## Calcul de $u_{\vec{k}}$ et $v_{\vec{k}}$

$$\langle \Phi | H_{int} | \Phi \rangle = \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle \Phi | b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}'} | \Phi \rangle$$

$$b_{\vec{k}'} | \Phi \rangle = b_{\vec{k}'} (u_{\vec{k}'} + v_{\vec{k}'} b_{\vec{k}'}^+) | 0_{\vec{k}'} \rangle = v_{\vec{k}'} | 0_{\vec{k}'} \rangle$$

$$b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}'} | \Phi \rangle = v_{\vec{k}'} b_{\vec{k}}^+ | 0_{\vec{k}'} \rangle = v_{\vec{k}'} b_{\vec{k}}^+ (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+) | 0_{\vec{k}\vec{k}'} \rangle = v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}} | 0_{\vec{k}\vec{k}'} \rangle$$

$$\langle \Phi | b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}'} | \Phi \rangle = \langle 0_{\vec{k}\vec{k}'} | (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+) (u_{\vec{k}'} + v_{\vec{k}'} b_{\vec{k}'}^+) v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}} | 0_{\vec{k}\vec{k}'} \rangle = v_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}}$$

D'où le résultat :

$$\langle \Phi | H_{int} | \Phi \rangle = \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}}$$

$$\langle \Phi | H - \mu N | \Phi \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 + \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}}$$

## Calcul de $u_k$ et $v_k$

$$\langle \Phi | H - \mu N | \Phi \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \epsilon_k v_{\vec{k}}^2 + \sum_{kk'} V_{kk'} v_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}}$$

Nous allons minimiser cette expression avec la contrainte :  $u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$

On pose :  $u_{\vec{k}} = \sin \theta_k$   $v_{\vec{k}} = \cos \theta_k$

$$\langle \Phi | H | \Phi \rangle = 2 \sum_{\vec{k}} \epsilon_k \cos^2(\theta_k) + \frac{1}{4} \sum_{kk'} V_{kk'} \sin(2\theta_k) \cos(2\theta_{k'})$$

$$\frac{d \langle \Phi | H | \Phi \rangle}{d\theta_k} = -2\epsilon_k \sin(2\theta_k) + \cos(2\theta_k) \sum_{k'} V_{kk'} \sin(2\theta_{k'}) = 0$$

## Calcul de $u_k$ et $v_k$

$$\tan(2\theta_k) = \frac{\sum_{k'} V_{kk'} \sin(2\theta_{k'})}{2\epsilon_k} = -\frac{\Delta_k}{\epsilon_k}$$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sin(2\theta_{k'}) = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'}$$

$$\cos^2(2\theta_k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta_k}{\epsilon_k}\right)^2} = \frac{\epsilon_k^2}{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

On en déduit :

$$v_k^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta_k)) = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right\}$$

## Calcul de $u_k$ et $v_k$

$$\tan(2\theta_k) = \frac{\sum_{k'} V_{kk'} \sin(2\theta_{k'})}{2\epsilon_k} = -\frac{\Delta_k}{\epsilon_k}$$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sin(2\theta_{k'}) = -\sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'}$$

$$\cos^2(2\theta_k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta_k}{\epsilon_k}\right)^2} = \frac{\epsilon_k^2}{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

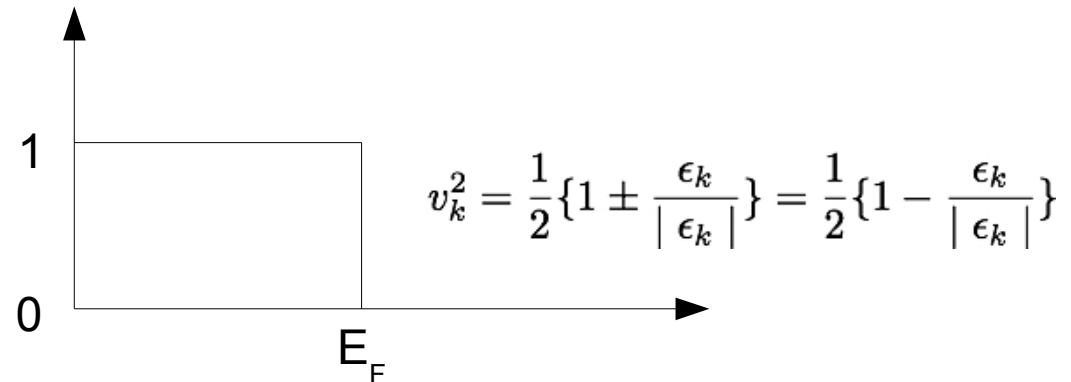
On en déduit :

$$v_k^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta_k)) = \frac{1}{2}\left\{1 \pm \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}\right\}$$

Dans l'état normal  
à  $T=0$  :

$$V_{kk'} = 0$$

$$\Delta_k^2 = 0$$



# Calcul de $u_k$ et $v_k$

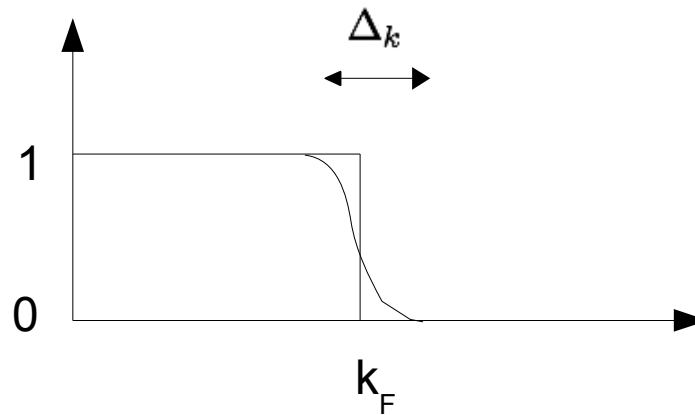
D'où les expressions :

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right\}$$

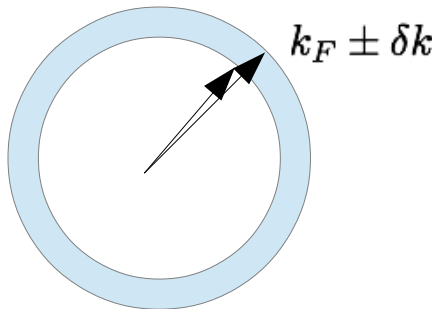
$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right\}$$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{V_{kk'} \Delta_{k'}}{\sqrt{\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}$$

Destruction de la sfce de Fermi



# Hypothèse BCS sur le gap



Choix d'une orbitale s,  $l=0$   
(État singulet)

$$\zeta(k) = 1 \text{ si } k_F - \delta k < k < k_F + \delta k$$

$$\zeta(k) = 0 \text{ sinon}$$

$$V_{kk'} = -V\zeta(k)\zeta(k')$$

Gap isotrope

$$\Delta_k = \Delta\zeta(k)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\Delta V \sum_{k'} \frac{\zeta(k')}{\sqrt{\epsilon_{k'}^2 + \Delta^2}}$$

Equation self-consistante :

$$1 = \frac{V}{2} \int_{-\delta\epsilon}^{\delta\epsilon} \frac{n(\epsilon)d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \quad \delta\epsilon = \hbar v_F \delta k$$

$$\frac{2}{Vn(0)} = 2 \int_{-\delta\epsilon}^{\delta\epsilon} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} = 2 \operatorname{arsh}\left(\frac{\delta\epsilon}{\Delta}\right)$$

Pour les phonons :

$$\Delta = \frac{\delta\epsilon}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{Vn(0)}\right)} = \frac{\hbar\omega_D}{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{Vn(0)}\right)} \simeq 2\hbar\omega_D \exp\left(\frac{-1}{Vn(0)}\right)$$

# Gain d'énergie d'interaction

$$\delta H = \langle H_{int} \rangle_{supra} - \langle H_{int} \rangle_{normal}$$

$$H_{int} = \sum_{k,k'} V_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$

$$H_{int} = \sum_{k,k'} V_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} = - \sum_k \Delta_k u_k v_k = - \sum_k \frac{\Delta_k^2}{2\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}$$

$$\text{Car : } u_k v_k = \frac{\Delta_k}{2\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}$$

$$\Delta_k = \Delta \zeta(k)$$

$$\delta H_{int} = -\frac{\Delta^2 n(0)}{2}$$

$$\delta H_{tot} = -\frac{\Delta^2 n(0)}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$B_C^2 = \mu_0 \Delta^2 n(0) \sim qq10^{-2}T$$

# Forme des états excités

- BCS ont « deviné » les états excités
- Ce sont les mêmes états excités que pour un métal...

$$\begin{aligned}\gamma_{\vec{k},\uparrow}^+ | \Phi \rangle &= C_{\vec{k},\uparrow}^+ | 0_{\vec{k}} \rangle & \gamma_{\vec{k},\sigma}^+ &= u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\sigma}^+ - \sigma v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},-\sigma} \\ \gamma_{\vec{k},\uparrow}^+ &= u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\uparrow}^+ - v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},\downarrow} & \gamma_{\vec{k},\sigma}^+ &= u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\sigma}^+ - \sigma v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},-\sigma}^+\end{aligned}$$

On peut vérifier que ces opérateurs obéissent à la statistique de FD :

$$[\gamma_{k,\sigma}, \gamma_{k',\sigma'}]_+ = [\gamma_{k,\sigma}^+, \gamma_{k',\sigma'}^+]_+ = 0 \quad [\gamma_{k,\sigma}, \gamma_{k',\sigma'}^+]_+ = \delta_{kk'} \delta_{\sigma\sigma'}$$

# Signification du « gap »

- Littéralement = bande interdite :

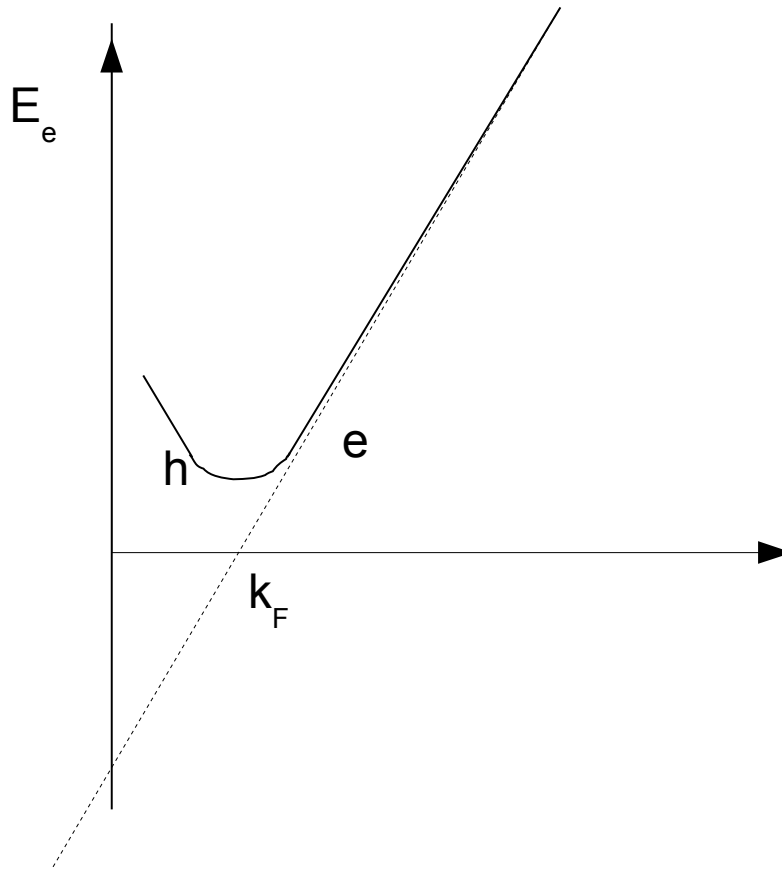
Si on calcule l'énergie de l'excitation / fondamental BCS

$$\langle \Phi | \gamma_{\vec{k},\uparrow} H \gamma_{\vec{k},\uparrow}^+ | \Phi \rangle - \langle \Phi | H | \Phi \rangle = (1 - 2v_k^2)\epsilon_{\vec{k}} + 2u_k v_k \Delta_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

On voit apparaître  $\Delta$  comme une énergie de seuil pour les excitations.

# Energie des excitations

$$\langle \Phi | \gamma_{\vec{k},\uparrow} H \gamma_{\vec{k},\uparrow}^+ | \Phi \rangle - \langle \Phi | H | \Phi \rangle = (1 - 2v_k^2) \epsilon_{\vec{k}} + 2u_k v_k \Delta_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$



# Signification du « gap »

- Littéralement = bande interdite :

Si on calcule l'énergie de l'excitation / fondamental BCS

$$\langle \Phi | \gamma_{\vec{k},\uparrow} H \gamma_{\vec{k},\uparrow}^+ | \Phi \rangle - \langle \Phi | H | \Phi \rangle = (1 - 2v_k^2)\epsilon_{\vec{k}} + 2u_k v_k \Delta_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

On voit apparaître  $\Delta$  comme une énergie de seuil pour les excitations.

- Grande différence avec les semiconducteurs :
  - Ouverture sur la surface de Fermi et pas en bord de ZDB
  - Possède une signification à  $T=0$  (se traduit dans le spectre des excitations mais aussi dans l'état fondamental)
  - C'est un paramètre d'ordre, il est aussi relié à l'amplitude de la fonction d'onde électronique et peut admettre une dépendance complexe

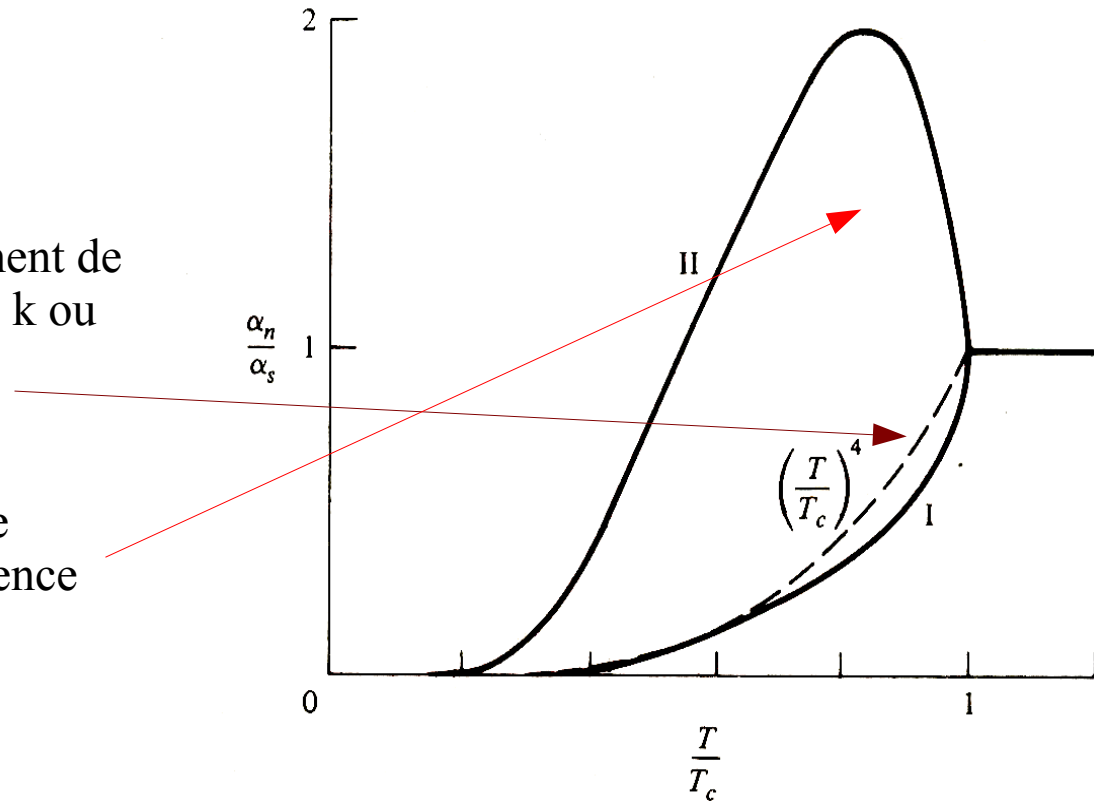
# Pic de cohérence

- Selon la nature de l'interaction considérée les facteurs de cohérence  $u_k$  et  $v_k$  se combinent différemment

$$H_{int} = \sum_{k, \sigma, k', \sigma'} B_{k' \sigma', k \sigma} C_{k' \sigma'}^+ C_{k \sigma}$$

Électron-phonon : le signe de l'élément de matrice est indépendant du signe de  $k$  ou  $\epsilon$  :  
addition cohérente

Electron-photon (p.A) : l'élément de matrice change de signe  $\rightarrow$  interférence  
« destructive »



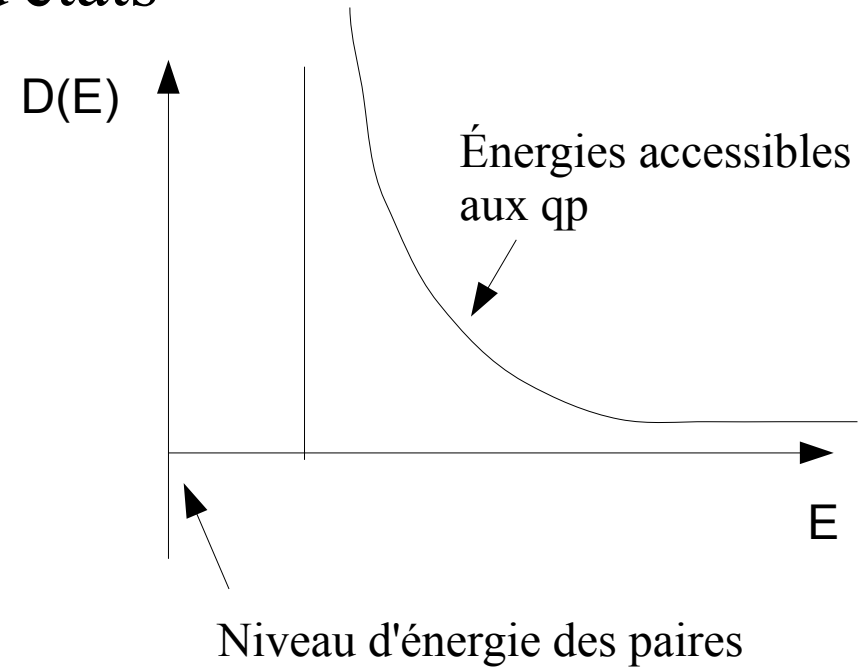
# Densité d'états

$$N(E_e)dE_e = n(\epsilon)d\epsilon$$

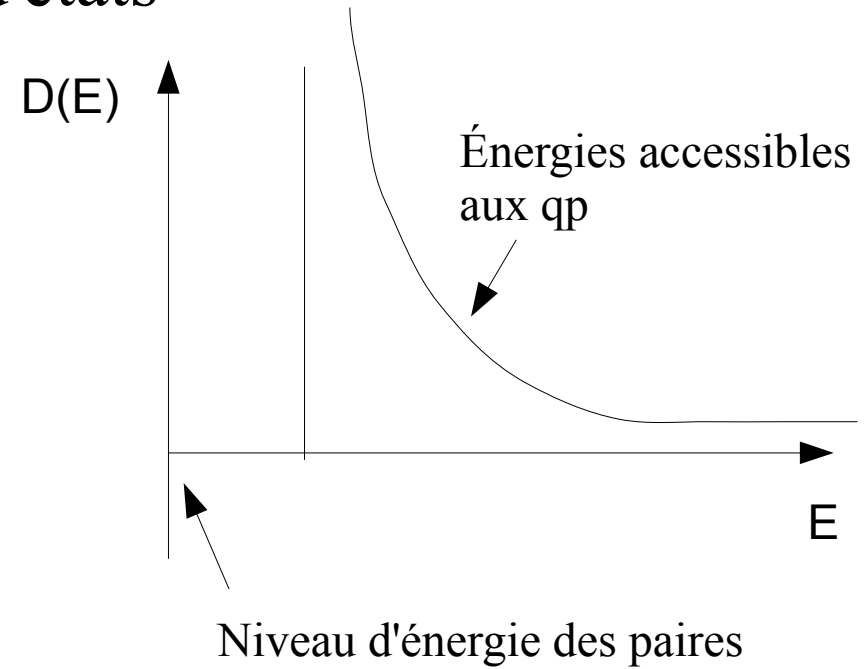
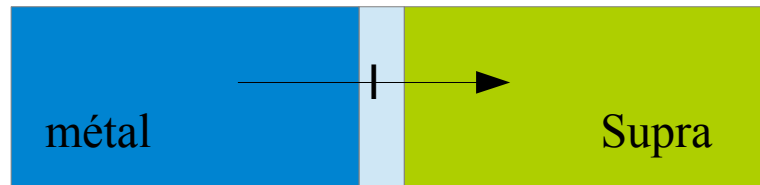
$$E_e^2 = \epsilon^2 + \Delta^2$$

$$\frac{d\epsilon}{dE_e} = \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - \Delta^2}}$$

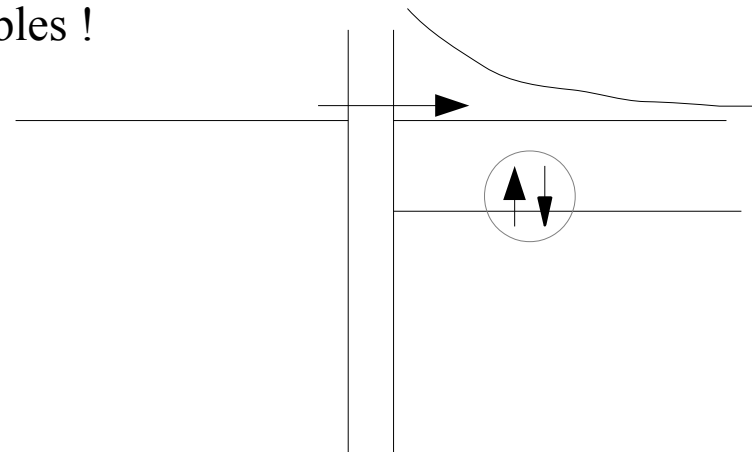
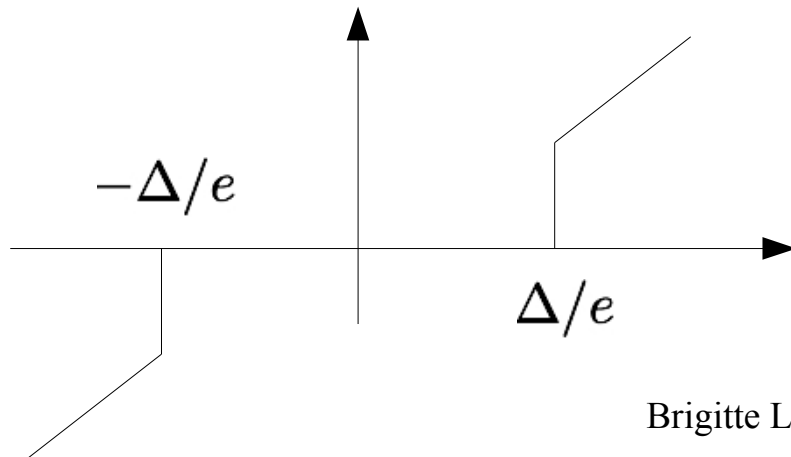
$$N(E_e) = n(0) \frac{E_e}{\sqrt{E_e^2 - \Delta^2}}$$



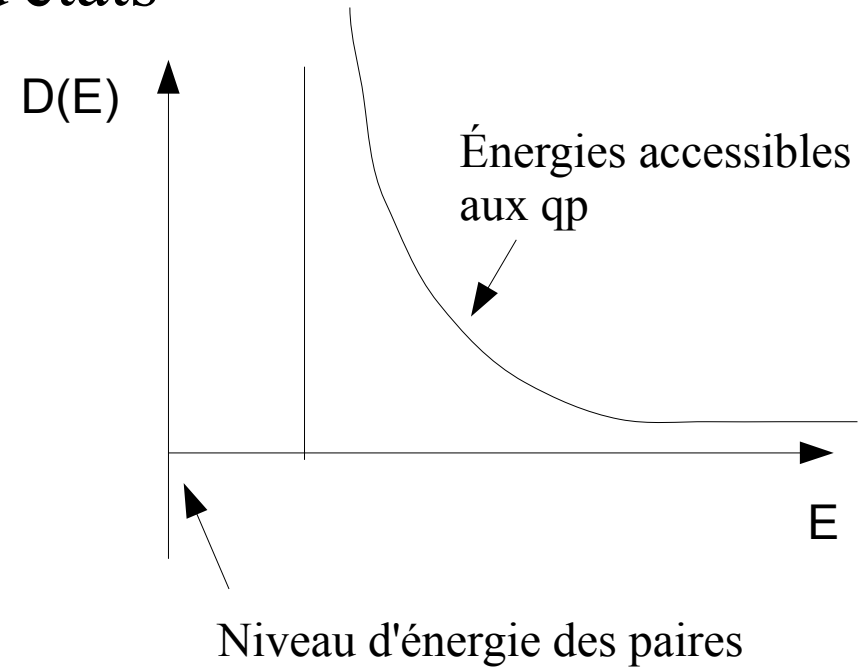
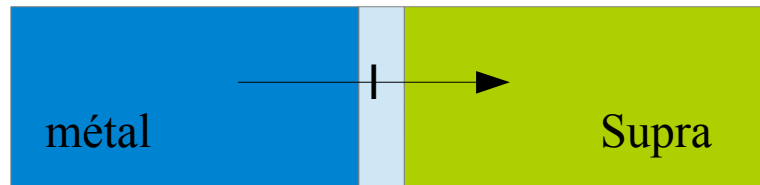
# Densité d'états



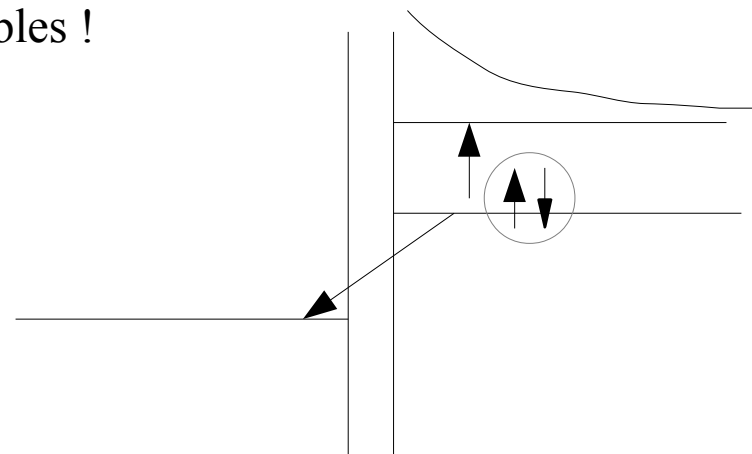
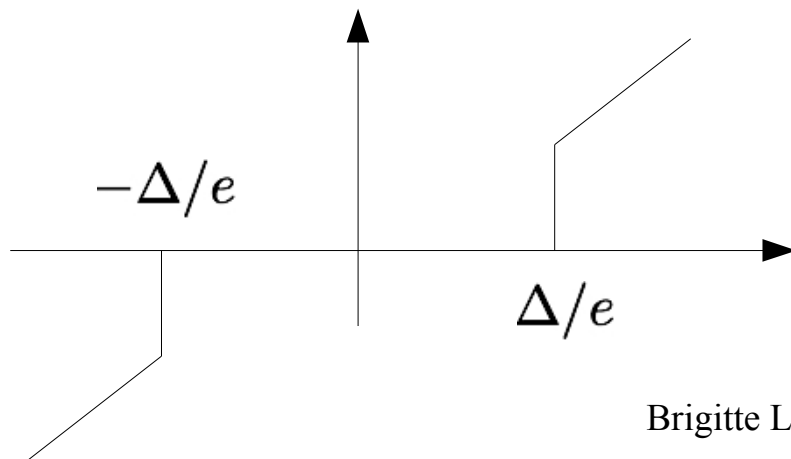
Attention, il n'y a pas d'énergies négatives accessibles !



# Densité d'états



Attention, il n'y a pas d'énergies négatives accessibles !



# Bogoliubov et Valatin

- Méthode de champ moyen

$$b_k^+ b_{k'} = b_k^+ \langle b_{k'} \rangle + \langle b_k^+ \rangle b_{k'} - \langle b_k^+ \rangle \langle b_{k'} \rangle$$

Ils ont diagonalisé H- $\mu$ N, calculé  $u_k$  et  $v_k$  à T non nulle et retrouvé les expressions de BCS, où a priori  $\Delta = \Delta(T)$ .

$$\Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f_{k'})$$

$$\text{avec } f_{k'} = \frac{1}{1 + e^{-\beta E_{ek'}}}$$

$$E_{ek'} = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

$$\frac{2}{V} = \int_{-\hbar\omega_0}^{\hbar\omega_0} \frac{n(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) d\epsilon$$

Ce qui permet de calculer Tc :

$$\frac{2}{V} = \int_{-\hbar\omega_0}^{\hbar\omega_0} \frac{n(\epsilon)}{\epsilon} \text{th}\left(\frac{\epsilon}{2k_B T_C}\right) d\epsilon$$

# Longueur de cohérence, relation $T_c / \Delta$

Longueur de cohérence

- L'extension en énergie de la fonction d'onde est  $\Delta$ .

- Extension en  $k$  :

$$\frac{\Delta}{\text{grad}_k(\epsilon)} = \frac{\Delta}{\hbar v_F}$$
$$\xi(T) = \frac{\hbar v_F}{\Delta}$$

# Longueur de cohérence, relation $T_c / \Delta$

Longueur de cohérence

- L'extension en énergie de la fonction d'onde est  $\Delta$ .

- Extension en  $k$  :

$$\frac{\Delta}{\text{grad}_k(\epsilon)} = \frac{\Delta}{\hbar v_F}$$
$$\xi(T) = \frac{\hbar v_F}{\Delta}$$

Relation universelle entre  $\Delta(0)$  et  $T_c$

$$\frac{1}{Vn(0)} = \int_0^{\hbar\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \text{th}\left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T}\right) d\epsilon = \int_0^{\hbar\omega_0} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2(0)}} = \int_0^{\hbar\omega_0} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \text{th}\left(\frac{\epsilon}{2k_B T_C}\right)$$

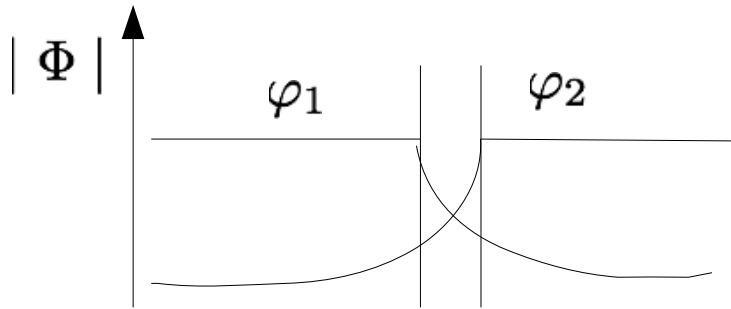
$$\Delta(0)/k_B T_C = \pi e^{-C} = 1.76$$

Toujours vérifié dans les premiers supras sauf Pb et Hg (couplage fort).

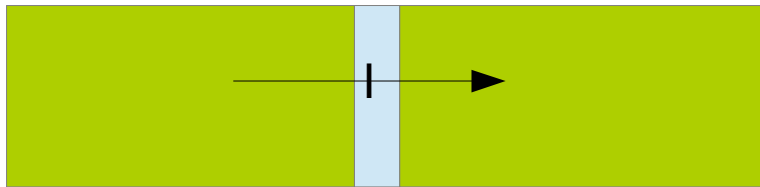
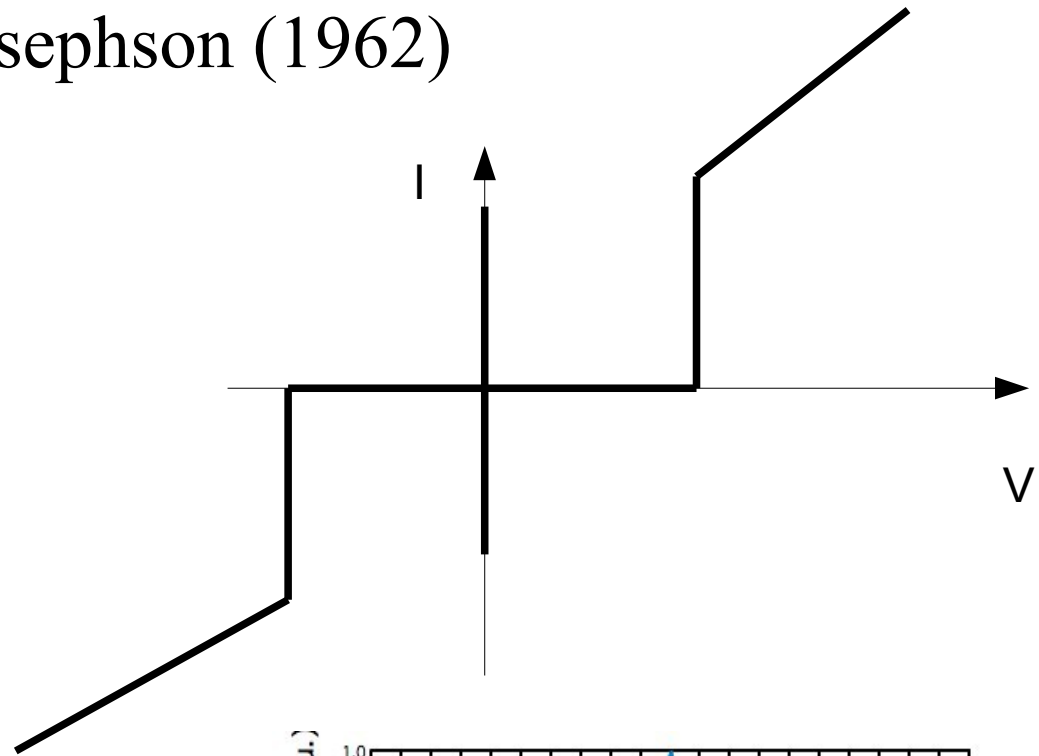
# Les succès de BCS

- Couplage faible  $\Delta(0)/k_B T_C = \pi e^{-C} = 1.76$
- Extension couplage fort : théorie d'Eliashberg
- Existence du gap : Forme de la chaleur spécifique, de l'absorption en  $\omega$ , etc...
- Effet isotopique  $T_C \sim M^{-\beta}$  ( $\beta=0.5$  pour MT à bande large).
- Pas prédictive en ce qui concerne  $T_c$  ...
- Une conséquence : l'effet Josephson (prédit en 1962)
- Forme des excitations, facteurs de cohérence (absorption en T, RMN, etc...)

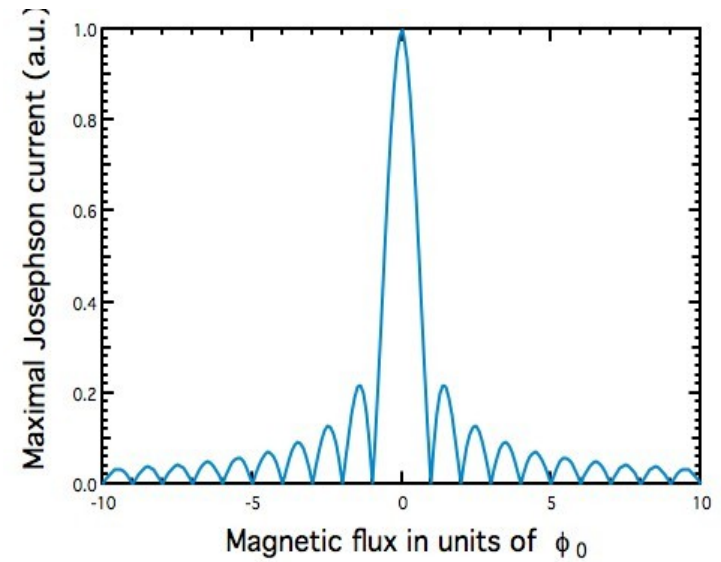
# Effet Josephson (1962)



$$J = J_0 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$J = J_0 \sin(2eVt/\hbar)$$



# « Non conservation de la charge »

Le nombre de particules et la phase subissent une indétermination

$$\gamma_{\vec{k},\sigma}^+ = u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\sigma}^+ - \sigma v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},-\sigma}$$

$$\gamma_{\vec{k},\sigma}^- = u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\sigma} - \sigma v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},-\sigma}^+$$

$$|\Phi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iN\varphi/2} \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} e^{i\varphi} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) |0\rangle$$

$$\gamma_{e,\vec{k},0}^+ = u_{\vec{k}} C_{\vec{k},\uparrow}^+ - v_{\vec{k}} S^+ C_{-\vec{k},\downarrow}$$

$$\gamma_{h,\vec{k},0}^+ = u_{\vec{k}} S C_{\vec{k},\uparrow}^+ - v_{\vec{k}} C_{-\vec{k},\downarrow}$$

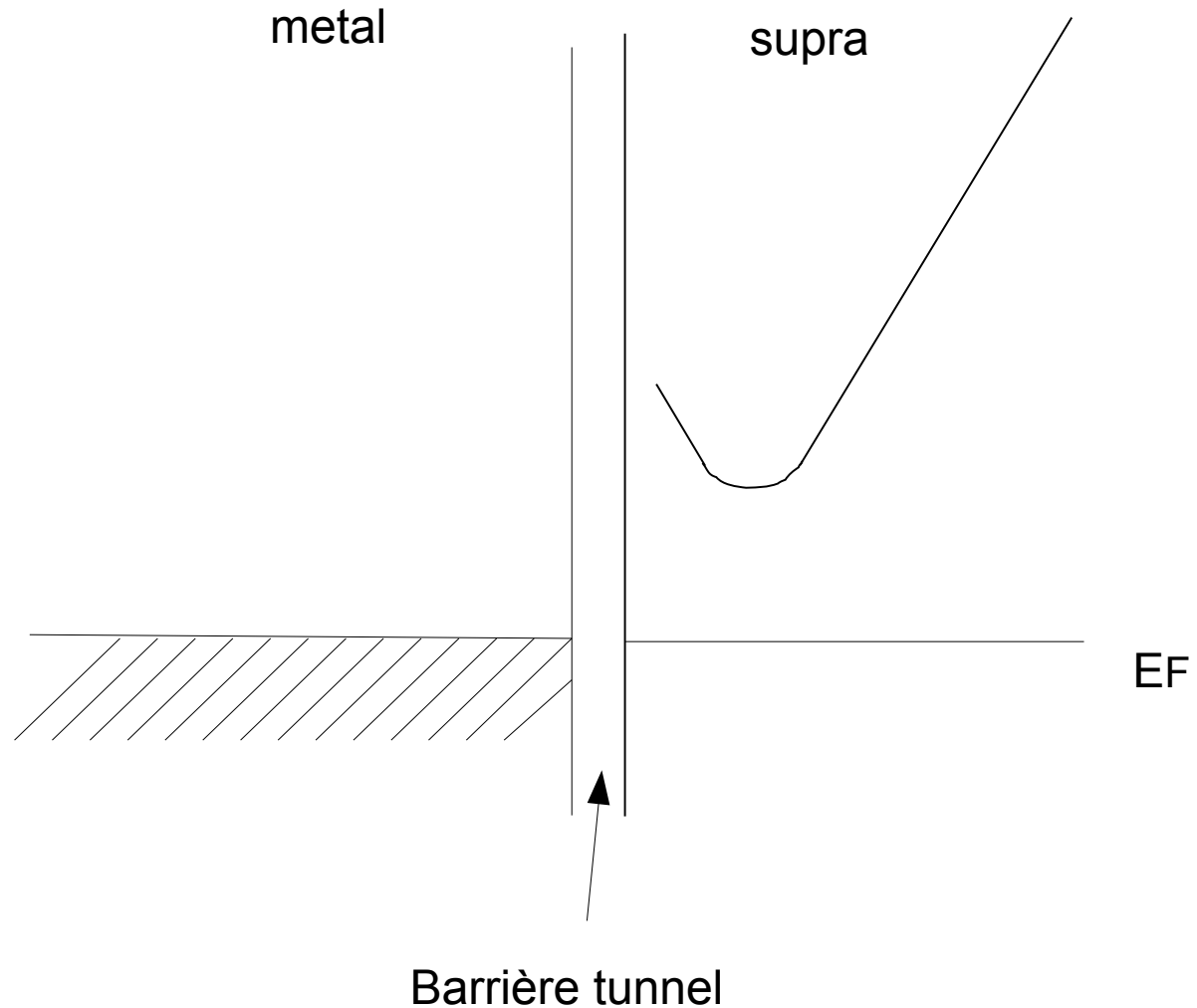
$$\gamma_{e,\vec{k},1}^+ = u_{\vec{k}} C_{-\vec{k},\downarrow}^+ + v_{\vec{k}} S^+ C_{\vec{k},\uparrow}^+$$

$$\gamma_{h,\vec{k},1}^+ = u_{\vec{k}} S C_{-\vec{k},\downarrow}^+ + v_{\vec{k}} C_{\vec{k},\uparrow}^+$$

Josephson Phys. Letters 1, 251 (1962)  
Bardeen Phys. Letters 9, 147 (1962)

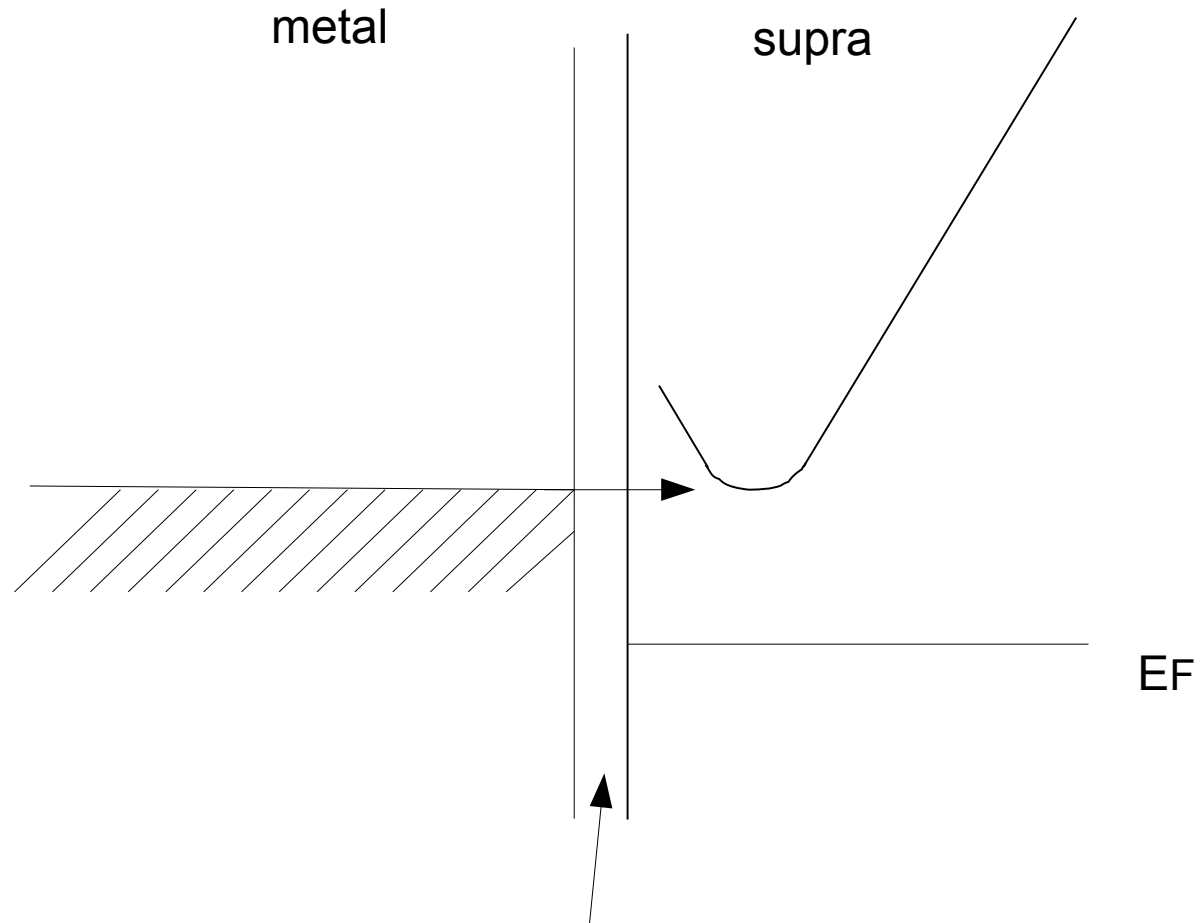
# Spécificité de l'état fondamental et des excitations

expérience



# Spécificité de l'état fondamental et des excitations

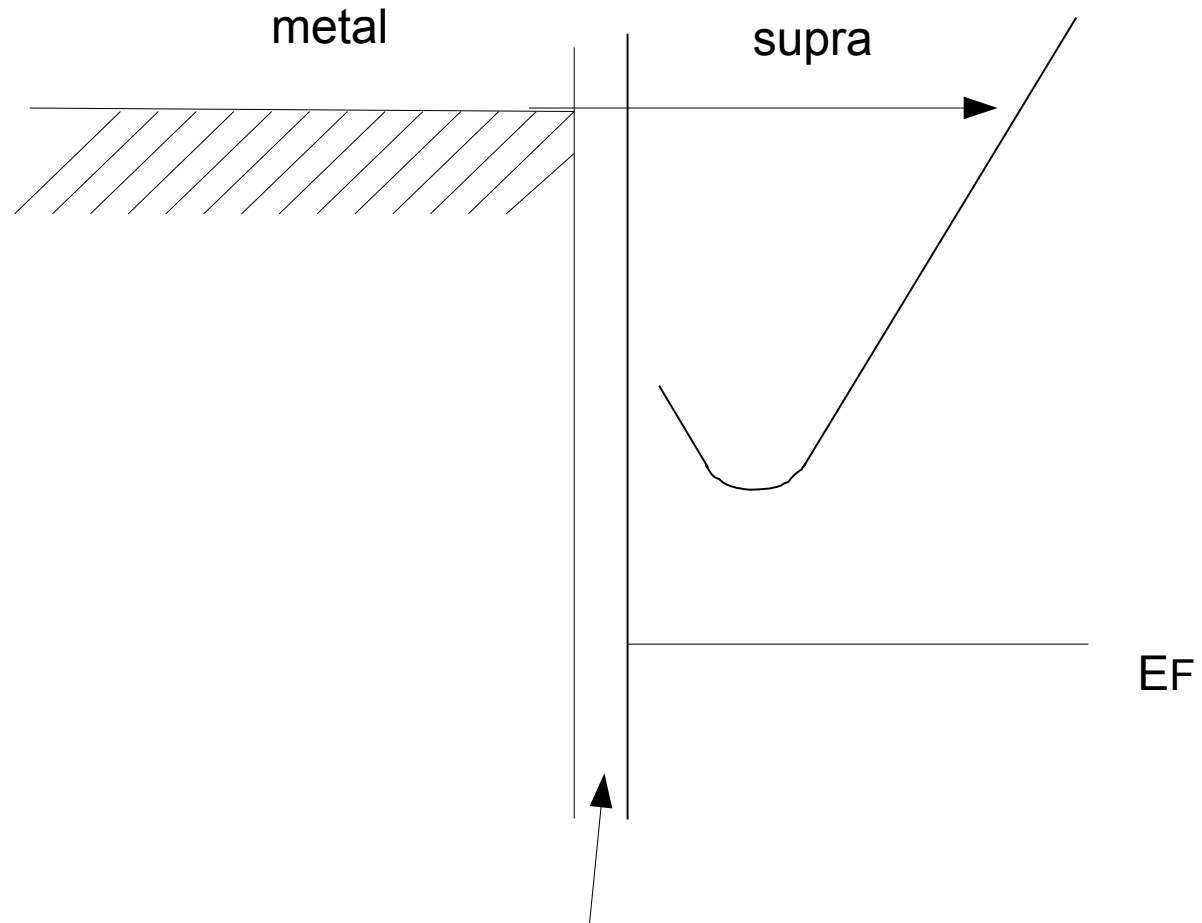
expérience



Barrière tunnel

# Spécificité de l'état fondamental et des excitations

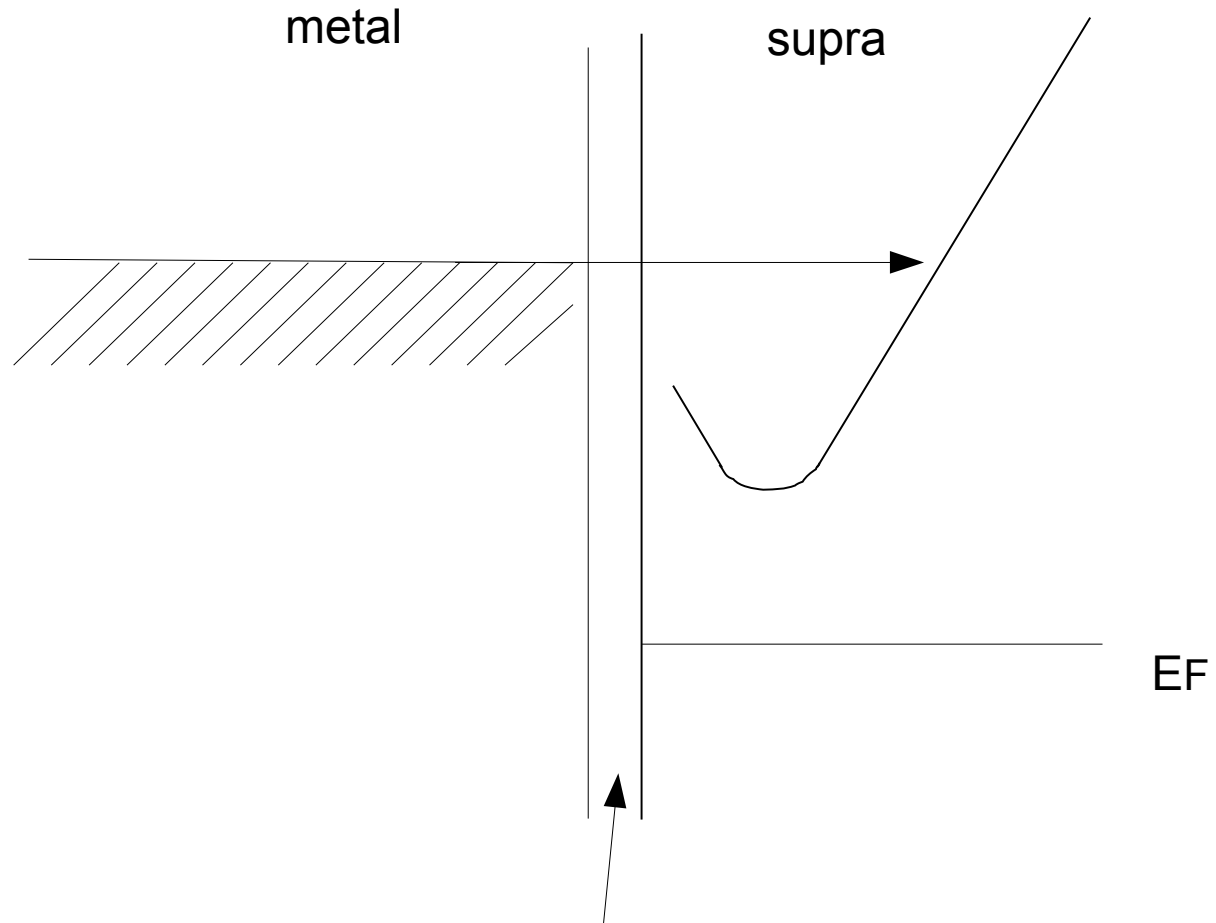
expérience



Barrière tunnel

# Spécificité de l'état fondamental et des excitations

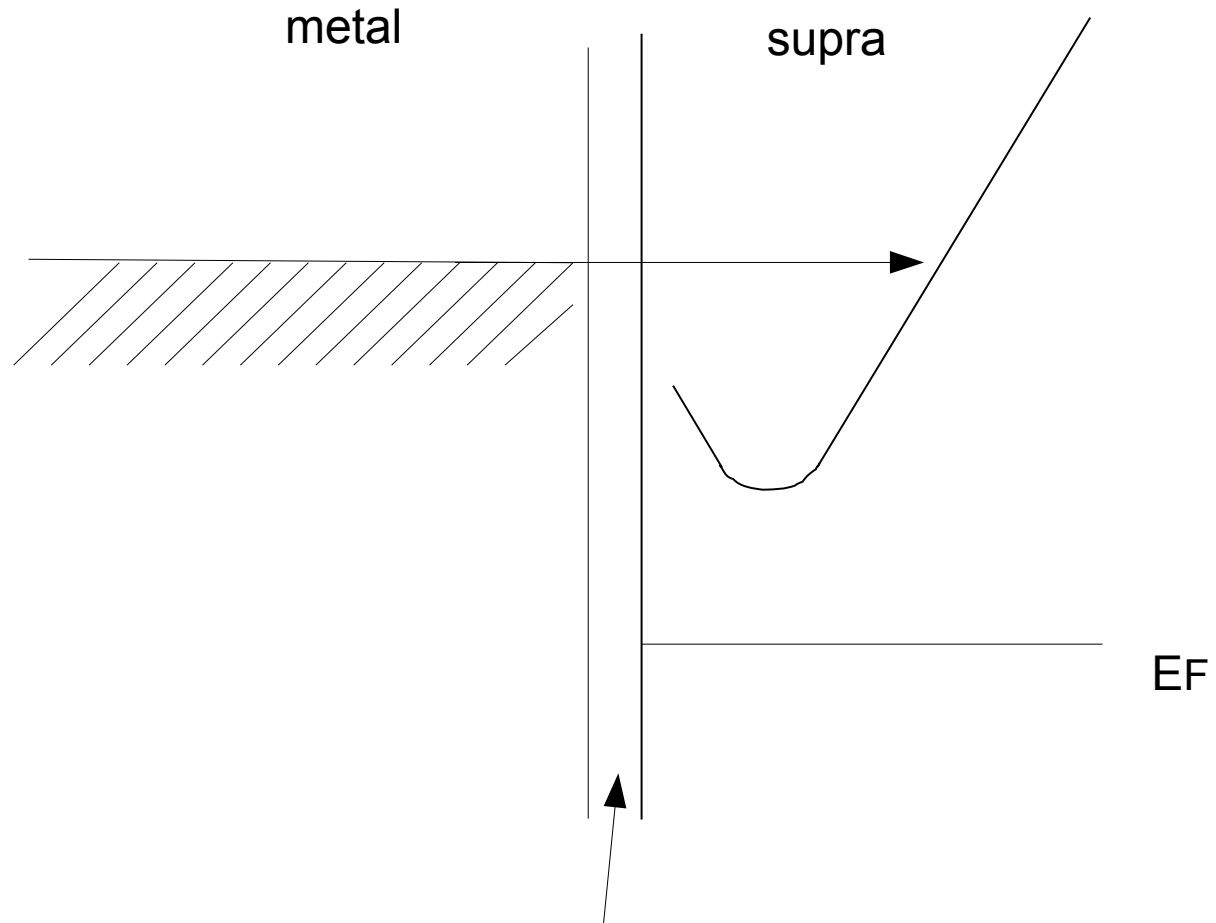
expérience



Barrière tunnel

# Spécificité de l'état fondamental et des excitations

expérience



Barrière tunnel

## Qu'arrive-t-il au condensat ?

|                           |                                             |                                                     |
|---------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| metal                     |                                             | supraconducteur                                     |
| $C_{k,+}^\dagger$<br>$+e$ |                                             | $= u_k \gamma_{ek0}^\dagger + v_k \gamma_{hk1}$     |
|                           | $\uparrow$<br>ajoute e avec la pbté $u_k^2$ | $\nwarrow$<br>retire -e avec la probabilité $v_k^2$ |

$$\gamma_{ek0}^\dagger = u_k C_{k,+}^\dagger - v_k S^\dagger C_{-k,-}$$

ajoute 2e au condensat avec la probabilité  $v_k^2$

$$\gamma_{hk1} = u_k S^\dagger C_{-k,-} + v_k C_{k,+}^\dagger$$

ajoute 2e au condensat avec la probabilité  $u_k^2$

Total pour le condensat  $4e \times u_k^2 v_k^2 = e \text{ à } k=k_F$

0 spin ajouté au condensat dans tous les cas

## Qu'arrive-t-il aux excitations ?

metal

Supraconducteur

$$C_{k,+}^\dagger = u_k \gamma_{ek0}^\dagger + v_k \gamma_{hk1}$$

$$\gamma_{ek0}^\dagger = u_k C_{k,+}^\dagger - v_k S^\dagger C_{-k,-}$$

Charge ajoutée  
aux excitations:

$$e(u_k^2 - v_k^2) = eq_k = e\left(\frac{\epsilon_k}{E_k}\right) = 0 \quad \text{à } k=K_F$$

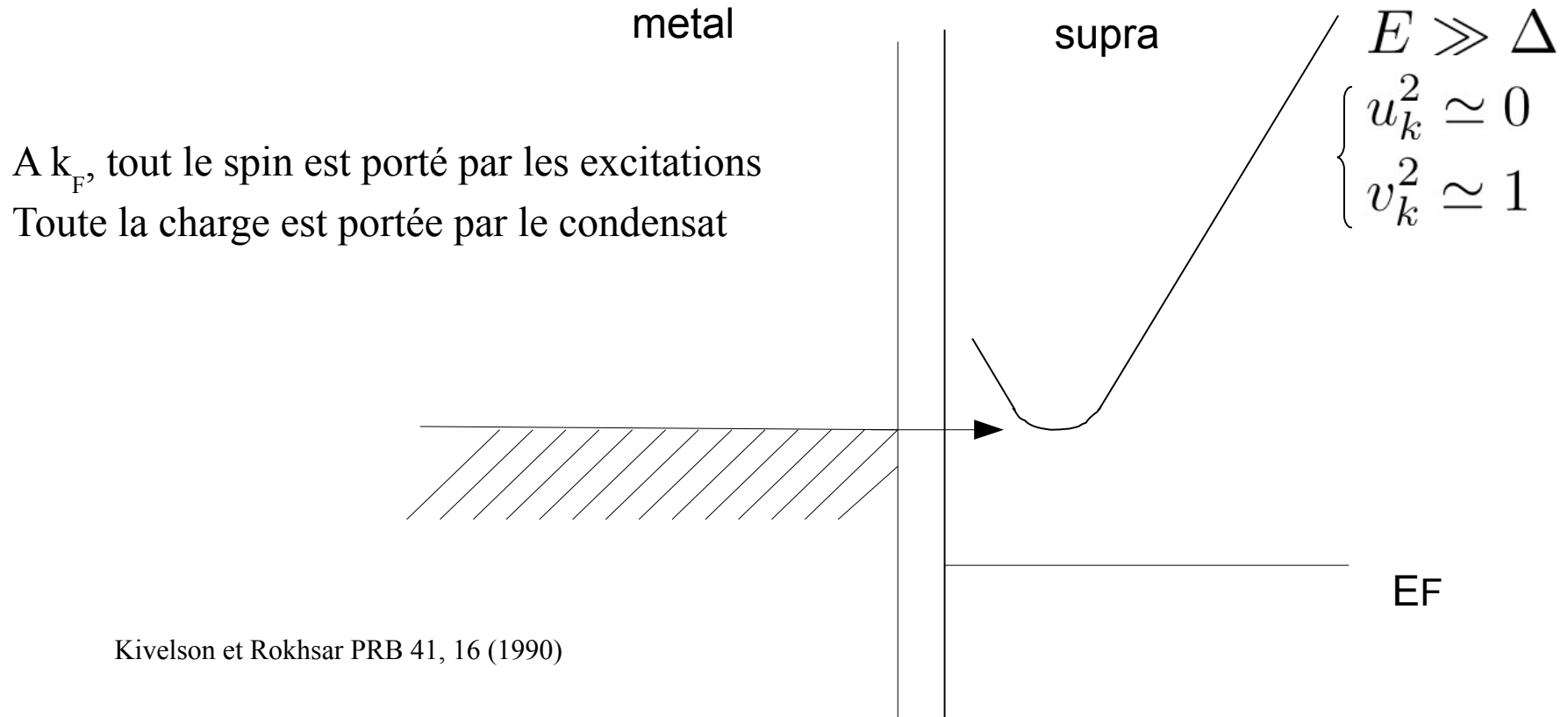
$$\gamma_{hk1} = u_k S^\dagger C_{-k,-} + v_k C_{k,+}^\dagger$$

Charge ajoutée  
aux excitations:

$$e(-u_k^2 + v_k^2) = -eq_k = -e\left(\frac{\epsilon_k}{E_k}\right)$$

1 spin ajouté aux excitations dans tous les cas

# Séparation spin-charge



Kivelson et Rokhsar PRB 41, 16 (1990)

# Imbalance de branche

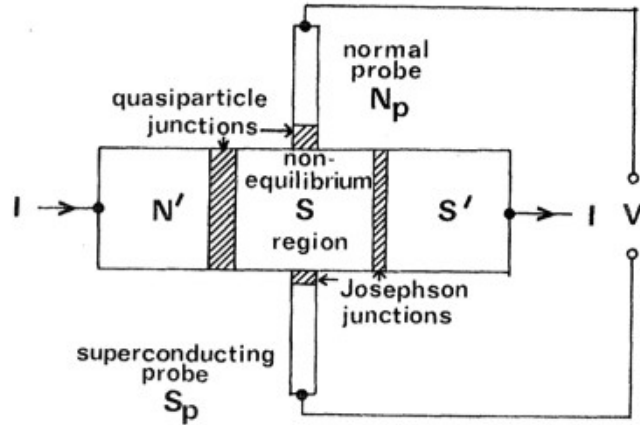


FIG. 1. Schematic diagram of nonequilibrium experiment. Quasiparticles are injected into  $S$  from  $N'$ , and pairs extracted into  $S'$ .  $S_p$  measures the pair chemical potential in  $S$ , while  $N_p$  measures the quasiparticle potential.

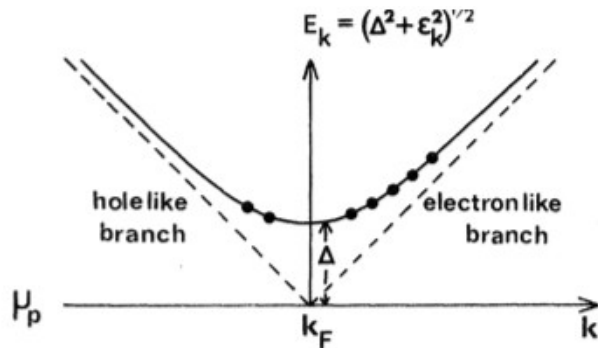


FIG. 2. Excitation spectrum of a superconductor with energies referred to  $\mu_p$ . There are  $n_>$  excitations on the electronlike branch ( $k > k_F$ ), and  $n_<$  on the holelike branch ( $k < k_F$ ). The imbalance  $Q = n_> - n_<$ .

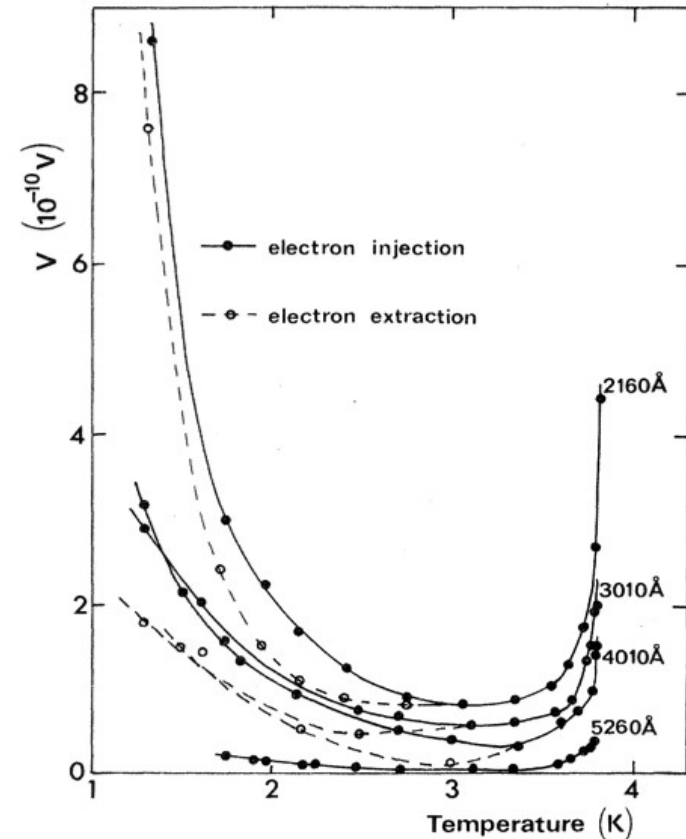


FIG. 2. Potential difference  $V$  between  $Y$  and  $Z$  for four thicknesses of  $\text{Sn}$  versus temperature.  $V$  is normalized to the injection current ( $I$ ) of 1 mA. Sample area,  $0.1 \text{ cm}^2$ .

Clarke, PRL 28, 1363, (1972)

Tinkham and Clarke PRB 28, 1366 (1972)

Et  $R=0$  ,  $B=0$  dans tout ça ?

$$\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} - \frac{e\vec{A}}{m}$$

Dans l'état fondamental  $p=0$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$\vec{J}_2 = \frac{-ne^2}{m} \vec{A}$$

London ?

$$n \neq n_S$$

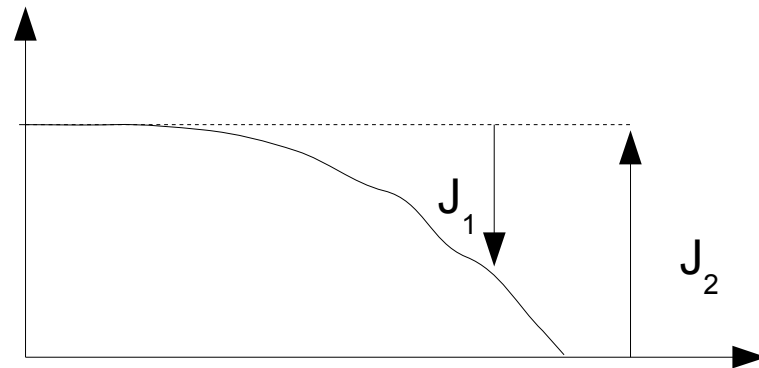
$$\vec{J}_2 = \frac{-n_s e^2}{m} \vec{A}$$

Le courant diamagnétique  $J_2$  existe toujours y compris dans l'état normal !

BCS permet de calculer  $J_1$

Etat normal  $J=0$

Etat supra compensation partielle



# To be or not to be... BCS

1)  $T_C > 20 \text{ K}$

2)  $\Delta/k_B T_C \sim 1.76$

3) gap de symétrie s

4) mécanisme électron-phonon

5) condensation amplitude et phase simultanées ?  $\langle r | \psi \rangle = |\psi| e^{i\varphi}$

6)  $\Phi = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^+ c_{-\vec{k},\downarrow}^+) | 0 \rangle$

—► Il faut bien préciser ce qu'on entend par « c'est ou ce n'est pas BCS »...

## Pour en savoir plus...

- M. Tinkham « Introduction to superconductivity » Mc Graw-Hill
- P.G. de Gennes « Superconductivity of metals and alloys » Westview Press
- R.D. Parks « Superconductivity » CRC Press

Sur l'effet Josephson :

- A. Barone et G. Paterno « Physics and application of the Josephson effect »